수탁연구 RM 2004 - 45 -13
영재교육자료 : 중등수학 해석학

부등식, 늘 곁에 있는 친구!

연구진

연구책임자 : 조석희(한국교육개발원)
공동연구원 : 정현철(한국교육개발원)
표성수(한국교육개발원)
연구 조원 : 박윤미(한국교육개발원)

집 필 진

양희정(인천과학고등학교)

검토진

함남우(인천대학교)

한국교육개발원

머 리 말

영재교육 프로그램은 영재교육 담당 교원들이 지도할 학생들의 특성을 파악하고 그들의 심리적 특성과 적성, 능력 수준에 맞도록 개발해서 활용할 때, 가장 적합한 것이 될 수 있을 것입니다.

한국교육개발원은 1992년도부터 언어, 수학, 사회, 과학 분야의 초·중·고 학교급 영재들을 위해 교사들이 쉽게 활용할 수 있도록 교수-학습 자료를 개발하여 현장에 보급해 왔습니다. 한국교육개발원이 개발한 교수-학습자료는 창의적 생산성과 리더십을 계발하는 것으로 목표로 렌줄리의 삼부심화학습(Triad Enrichment) 모형, 문제기반학습 (Problem-based learning) 모형, KEDI 교수-학습 모형 등을 바탕으로 개발되었습니다. 전국의 영재교육기관에서는 이 자료들을 각 지역과 기관의 여건과 특성에 맞도록 편집·수정·보완하여 사용해 왔습니다.

2004년도에는 수학 영역의 교수-학습 자료 중 일부를 간학문적, 통합적으로 개발하였습니다. 질 높은 자료를 개발하기 위하여 연구·집필진이 최선의 노력을 다하였지만, 짧은 개발 기간과 제한된 여건 때문에 아직도 부족한 점이 있으리라 판단됩니다. 본 자료는 교육 현장의 여건과 학생의 특성, 지도 교사의 창의적인 아이디어에 따라 융통성 있게 수정·보완되어 사용되어야 할 것입니다.

본 자료 개발에 참여해 준 집필진, 검토진 및 여러 행·재정적 지원을 해 준 전국 15개 시·도 교육청 및 교육인적자원부 관계관 선생님들께도 감사를 드립니다. 그리고 연구진의 노고를 치하하는 바입니다.

2004년 12월

한 국 교 육 개 발 원

원 장 이 종 재



차 례

주제 설정의 취지 및 목적

수학은 인류와 같이 발생하여 문화 발전과 병행하면서 사회생활에 어려운 수, 양에 관련된 문제가 제기되었을 때 수학에서 사용되는 논리와 수학적인 식을 사용하여 해결하게끔 하는 경우를 생활주변에서 많이 발견한다.

넓이가 한정된 공간에서 그 면적을 최대가 되게 한다든지 손해와 이익은 얼마 이상 또는 이하로 하여야 되느냐는 문제에 접하게 되었을 때, 이를 해결하는 관계를 간단히 표현하는 도구는 문자식임을 인식하고 그 관련된 사건들을 부등식이라는 도구를 사용하여 해결할 수 있는 경우를 선정하여 부등식의 해를 구해봄으로써 사회생활에서 부딪히는 선택의 상황에서 적절한 선택을 하거나 그 결과를 예측해 보는 정당한 논리적 근거를 기르기 위하여 본 주제를 설정하였다.

1단계에서는 일상생활에서 여러 가지 형태로 나타나는 부등식을 활용한 문제 장면을 찾아 부등식으로 표현하여 문제를 해결해 나가는 데 있어서 필요한 전략을 탐색해 본다. 학생 스스로가 발견하는 즐거움을 느끼도록 유도하며, 몇 가지 예제를 통하여 주어진 문제를 부등식으로 나타내 보고 해결함으로써 다양한 문제 해결 전략의 필요성을 인식하도록 한다.

2단계에서는, 좌표평면의 부분집합으로 부등식의 영역을 이해하고, 부등식의 영역을 좌표평면에 그림으로 나타낼 수 있게 하며, 부등식을 이용하여 최대값과 최소값을 구하는 방법을 알게 한다.

또한 두 개의 문자 x, y의 일차식으로 구성된 연립부등식의 영역을 좌표평면에 나타내 보고, 선형계획법을 이용하여 이 영역에서 어떤 식의 최대값 또는 최소값을 구해보며, 심화활동으로 3변수 이상의 조건식이 주어지는 경우도 다루어 본다.

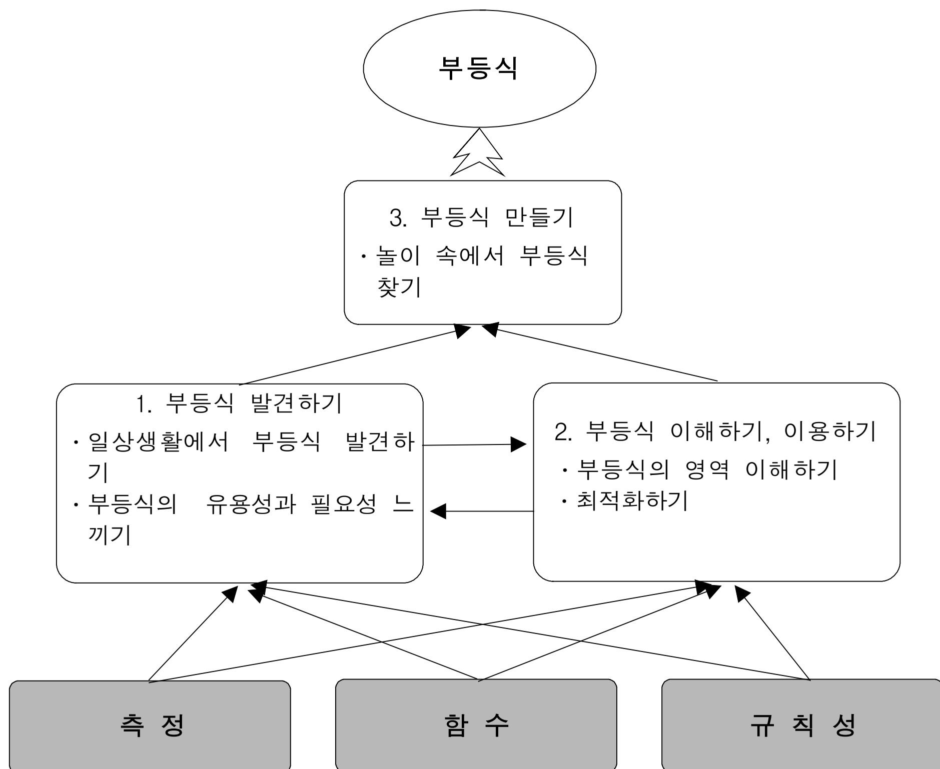
3단계에서는 1, 2단계에서 배운 전략을 가지고 학생들 스스로 문제를 만들어보고, 재미있는 수학 놀이 속에서 나타나는 부등식의 관계를 파악하고 탐구하는 활동을 한다.

학습목표

○ 생활에서 부등식을 사용한 예를 찾을 수 있다.
○ 실생활 주변에서 부등식을 적용한 사례를 찾을 수 있다.
○ 부등식 문제 해결에 필요한 문제 해결 전략을 찾을 수 있다.
○ 부등식의 영역의 뜻을 이해한다.
○ 연립부등식의 영역을 좌표평면에 나타낼 수 있다.

○좌표평면에 그림으로 표시된 영역을 연립부등식으로 나타낼 수 있다.
○최적화이론과 선형계획법을 설명할 수 있다.
○실생활의 여러 문제 상황에서 선형계획법을 적용하여 최대값의 문제를 해결할 수 있다.
○실생활의 여러 문제 상황에서 선형계획법을 적용하여 최소값의 문제를 해결할 수 있다.
○꼭지네모놀이를 할 수 있다.
○놀이 속에서 부등식 관계를 찾을 수 있다.

개념 모형도



지도 계획

전개 단계	활동명	주요 수업활동	주요수업 형태	탐구 단계	예상 차시
1단계 계획 수립하기	부등식 발견하기	· 단원소개 · 일상생활에서 부등식이 사용되는 예 발견하기 · 부등식의 유용성과 필요성 느끼기	· 교사강의 · 모둠활동 · 전체토론	자료 수집	2
		· 조별 탐구 주제 설정하기	· 모둠활동	연구진행에 대한 안내 및 계획 세우기	
2단계 지식 및 기능 습득하기	부등식의 영역 이해하기	· 등고선 그려보기 · 부등식의 영역 이해하기 · 부등식의 영역 문제 해결하기	· 개인실습 · 모둠활동 · 개별피드백 · 모둠별발표		3
	최적화하기	· 선형계획법을 이해하고 활용하기	· 교사강의 · 모둠활동 · 전체토론	자료 수집	3
3단계 수행하기	놀이 속에서 부등식 찾기	· 놀이 속에서 만드는 부등식	· 교사강의 · 개인실습 · 개별피드백 · 모둠활동		2
		· 보고서 작성하기	· 모둠활동	최종 마무리	
	연구보고서 발표	· 모둠별 발표, 토론, 평가	· 모둠활동	연구 결과 발표 및 평가	

평가	• 지식 및 개념 평가 • 행동특성 체크리스트 • 학생 • 교사설문지(프로그램평가) • 모둠활동평가 • 산출물 평가	평가 방법	• 개념 이해에 대한 지필 고사 • 학생들의 동료평가 • 보고서 및 산출물 평가 • 설문지 등을 통한 교사의 수업 평가 • 수업진행에 대한 평가



1단계 : 계획 수립하기

활동1. 부등식 발견하기

- 일상생활에서 부등식의 실례 찾기

활동 1

부등식 발견하기

복잡한 부등식을 풀이하는 것만 강조할 것이 아니라, 실생활의 문제를 부등호를 사용하여 간단한 식으로 표현하고, 그 부등식의 의미를 충분히 이해하는 데 그 의미를 두어야 한다.

일상생활 속에서 발견할 수 있는 부등식을 찾아봄으로써 흥미를 유발시키고 부등식에 대한 감각을 키우며, 또한 이를 바탕으로 학생 스스로 부등식이 활용되는 예들을 찾아 식을 세우고 문제를 해결할 수 있다.

먼저 생활에 적용된 간단한 부등식의 예를 조사하여 알아보게 하고, 선택의 문제장면에서 예컨대 음악회나 영화 관람을 하고자 할 때 학생 개개인이 입장료를 지불하는 것과 단체 관람료를 지불하여 입장하는 것 중 어느 것이 더 적은 돈으로 입장할 수 있는가를 알고자 할 때, 인터넷 사용료를 가장 저렴하게 지불하고자 하는 방법 등을 알 필요가 있을 때 등등 부등식을 사용하면 쉽게 해결할 수 있음을 지도한다.

부등식에서는 우리의 생활 주변에서 자주 접할 수 있는 실생활의 여러 소재를 탐구하고 알아보기를 통하여 많은 관심과 흥미를 느끼게 할 것으로 생각한다.

또한 일상생활 속에서 찾아 볼 수 있는 연립일차부등식이 활용될 만한 예들을 제시함으로써 부등식을 가깝게 느낄 수 있으며, 또한 이를 바탕으로 학생 스스로 연립일차부등식이 활용될 수 있는 예들을 찾아 식을 세우고 문제를 해결할 수 있다

이 단계는 학생 스스로가 발견하는 즐거움을 느끼도록 유도하며, 몇 가지 예제를 통하여 주어진 문제를 부등식으로 나타내 보고 해결함으로써 다양한 문제 해결 전략의 필요성을 인식하게 하는 단계이다.

<table>
<tr><td>학습 목표</td><td colspan="2">· 생활에서 부등식을 사용한 예를 찾을 수 있다.
· 실생활 주변에서 부등식을 적용한 사례를 찾을 수 있다.
· 부등식 문제 해결에 필요한 문제 해결 전략을 찾을 수 있다.</td></tr>
<tr><td rowspan="2">준비물</td><td>교사용</td><td>· 컴퓨터실(인터넷)</td></tr>
<tr><td>학생용</td><td>· 필기도구, 활동지, 계산기, 컴퓨터실(인터넷)</td></tr>
</table>



교수-학습활동

학습 단계	교수-학습 활동	예상 시간	유의점
도입	· 전체 주제에 대한 소개 및 동기를 유발시킨다. · 활동안내와 학습목표를 이해시킨다. · 학습 준비물을 확인한다.	5 ~ 10 분	· 프로젝트 전체 과정에 대해서 설명하고, 이를 이해하도록 한다.
본 활동	· 일상생활에서 부등식의 관계를 적용한 예를 조사, 탐구하여 발표하고 이야기한다. · 내게 가장 유리한 것이나 방법을 고르기 - 활동지 [가을 산의 단풍에서 찾는 부등식] - 활동지 [에너지 소비 효율 등급에 나타난 부등식] - 활동지 [전화요금체계에서 발견하는 부등식] - 활동지 [이동전화 최적요금제 조회서비스에서 발견하는 부등식] · 논의된 방법을 발표하고, 어떠한 주제가 적합한 것인지 전체 토론한다. · 교사는 학생들의 의견을 수렴하여 정리하는 형식으로 설명하여 준다.	30 ~ 50 분	· 모든 학생들이 참여하도록 독려한다. · 학생들의 활동이 문제의 본질에서 벗어나지 않도록 유의한다. · 학습목표 외적인 질문에서 학생의 의견을 수렴하도록 노력하면서 수업의 방향으로 유도한다. · 모둠별로 조사하고자 하는 방법의 다양성을 인정한다. · 논리적 추론 근거의 중요성을 강조한다.
	· 조별 탐구 주제 설정하기 -활동지	20분	· 가능한 주제가 설정될 수 있도록 유도한다.
정리	· 유리한 선택을 위해 부등식이 어떤 역할을 하는지 토의해 본다.	5 ~ 10분	· 학생들이 다양한 의견을 제시하고 적극적인 참여할 수 있도록 유도한다.



주요 초점질문

1. 생활 속에서 발견할 수 있는 부등식의 예는 어떤 것이 있습니까?
2. 많이 사용되는 이유는 무엇이라고 생각합니까?



지도 활동

우리 주변에는 부등식을 이용하여 나타내는 표현이 많이 있다. 부등식을 생활에 적용하기 위해서 어떤 표현을 쓰고 있는지 관찰, 조사하여 보자.
또한 여러분이 부등식을 생활에 적용한다면 어떻게 표시하여 사용하면 좋을까?

오늘의 활동은 생활 주변에서 부등식을 표현하여 사용하고 있는 예를 발견하고 분석하는 활동이다. 아울러 관련된 배경지식이나 내용에 대하여도 조사하여 토론하고 같이 알아보도록 하자.

■■ 가을 산의 단풍에서 찾아보는 부등식

해마다 가을이 되면 전국의 산은 고운 단풍으로 옷을 갈아입는다. 인천에 사는 민영이 가족은 이번 가을에 휴가를 내어 아름다운 산을 찾아 단풍놀이를 하고자 한다.

1) 온 식구가 각자 가보고 싶은 산을 이야기하기로 하였다. 아버지는 내장산으로, 어머니는 설악산으로, 오빠는 지리산으로 가고 싶어 한다. 차멀미가 심한 나는 되도록 가까운 산으로 가고 싶다. 의견 수렴을 위하여 제일 먼저 하여야 할 일은 무엇일까?

예상되는 답) 가능한 휴가기간을 정하여 본다.

전국의 유명한 산의 단풍이 드는 시기를 알아본다.

단풍이 드는 시기와 휴가기간에 맞추어 적당한 산을 선택한다.



설악산의 단풍

http://www.chosun.com/media/photo/news/200410/200410110137_02.jpg

2) 전국의 유명한 산의 단풍이 드는 시기를 알아봅시다.



※ 지도에서 선은 첫단풍을 보여주는 시기를 나타냄.

http://www.chosun.com/media/photo/news/200410/200410070155_00.jpg

3) 단풍이 드는 시기가 다른 까닭은 무엇일까?

예상되는 답) 단풍은 남쪽 지방보다는 북쪽 지방이, 해안 지방 보다는 내륙 지방이 먼저 든다.

첫서리가 내리는 시기가 빠른 지역이 단풍도 먼저 든다. 기온이 낮은 지역이 먼저 단풍이 든다.

단풍의 빛깔이 얼마나 고우냐는 그해의 강우량과 일교차에 달려 있다. 비가 너무 적으면 잎이 건조해지고 먼지가 끼어 고운 색이 안 나온다. 일교차가 클수록 단풍색이 선명하다. 올해(2004년)는 비가 적당히 온 데다 9월 일교차가 컸기 때문에 어느 해보다 아름다운 단풍을 볼 수 있다.

4) 휴가를 10월 15일에서 10월 17일 사이로 잡을 때 단풍놀이로 적당하지 않은 산은 어디인지 이야기해 보시오.

예상되는 답) 무등산, 내장산, 두륜산 등

지도초점
해마다 항상 같은 날짜에 단풍이 드는 것은 아님을 이해시킨다.

5) 2)에서 조사한 내용과 아래 표를 참고하여 각 산이 첫단풍이 들기 시작하여 절정기까지의 기간의 절반이 지나면 단풍이 모두 진다고 가정할 때, 단풍이 드는 시기(단풍을 볼 수 있는 시기)를 부등식으로 나타내어 보시오.

산이름	첫단풍(일)	절정기(일)
금강산	9.24	10.11
설악산	9.26	10.13
오대산	9.29	10.15
치악산	10.5	10.20
지리산	10.10	10.17
월악산	10.10	10.21
북한산	10.12	10.25
가야산	10.12	10.26
속리산	10.14	10.26
한라산	10.15	10.30
계룡산	10.15	10.26
팔공산	10.17	10.26
무등산	10.18	10.31
내장산	10.18	11.1
두륜산	10.27	11.10

http://news.joins.com/component/htmlphoto_mmdata/200410/htm_2004100715402430003800-001.JPG

예상되는 답의 예) 단풍이 드는 날짜를 x라 할 때,

설악산의 경우는 $09.26 \leqq x \leqq 10.22$

북한산의 경우는 $10.12 \leqq x \leqq 11.01$

·······

등이다.

6) 우리생활 속에 숨어 있는 또 다른 부등식의 표현을 찾아봅시다.

예상되는 답)

(1) 교통표지판에 숨어있는 부등식[1]



A



B



C

출처 http://www.rtsa.or.kr/ 도로교통안전관리공단

교통표지판 A는 자동차의 총 무게가 5.5톤 이하이어야 한다는 것을 의미하고 교통표지판 B는 최고 속력이 50km/h이어야 하며 교통 표지판 C는 최저 속력이 30km/h이어야 한다는 것을 의미한다. 여기에서 '5.5톤 이하', '최고 속력', '최저 속력'은 수학적 내용을 담고 있는 용어이다.

교통표지판 B가 있는 도로에서 주행하고 있는 자동차의 속력을 $x$km/h라고 할 때, 교통법규에 맞는 속력의 범위를 부등호를 사용하여 식으로 나타내어 보면 $x \leqq 50$이다.

또한, 다음 교통표지판도 부등식의 의미를 담고 있다.



차 높이 3.5m 제한



차폭 2.2m 제한



차간거리 50m 확보

출처 http://www.rtsa.or.kr/ 도로교통안전관리공단

(2) 일정한 키 이상이어야 탈 수 있는 놀이기구나 일정한 몸무게 이하이어야 탈 수 있는 놀이기구에 대한 안내문

1) 출처 http://www.mathlove.org 수학사랑

(3) 버스나 전철의 거리별, 구간에 따른 요금, 공원의 입장료

(4) 혈압이 140/90 mmHg[2)]이상일 때 고혈압이라 하고, 100/60 mmHg이하일 때 저혈압이라 한다.

(5) 김치는 2℃이상 7℃이하에서 2～3주간 숙성시킨 것이 가장 맛이 있고 영양가도 높다.

(6) 건조주의보는 실효습도가 50%이하이고, 당일 최소습도가 30%이하이며, 하루 중 최대풍속이 7m/s이상의 상태가 2일 이상 계속될 것으로 예상될 때 발표된다.

출처 http://www.mathlove.org/doc/activities/ 수학사랑

■■ 에너지 소비 효율 등급에 나타난 부등식

에너지 소비 효율 등급은 1등급부터 5등급까지가 있으며, 1등급에 가까울수록 에너지 절약형 제품이다. 1등급과 5등급의 에너지 소비량은 냉장고, 에어컨 등 가전 제품의 경우에는 30~40%, 승용차의 경우에는 최고 약 60%까지 차이가 난다. ‘에너지 소비 효율 등급’이 높은 등급의 제품을 사용하면 에너지만 절약되는 것이 아니라, 경제적으로도 상당한 이익이다. 실제로 가장 낮은 등급의 제품 대신 1등급 제품을 선택하는 경우, 냉장고는 평균 약 40%, 에어컨은 평균 약 34%의 전기료를 절약할 수 있다. 또 1400cc승용차를 기준으로 할 경우, 에너지 효율 1등급과 3등급의 연간 휘발유 비용은 약 18만원의 차이가 있다. 중・대형차의 경우 에너지 소비량의 차이는 더욱 커진다.

냉장고, 에어컨, 승용차 등에 ‘에너지 소비 효율 등급’표기가 붙어있다. 이것은 에너지를 많이 소비하는 제품에 대해 에너지 소비 효율 또는 에너지 사용에 따른 등급을 의무적으로 표시하도록 한 제도이다.

에너지소비효율등급표시제도는 에너지소비효율등급표시, 최저효율기준, 목표소비효율기준 등으로 구성되어 있다.

에너지소비효율등급표시제도는 제품의 에너지소비효율 또는 사용량에 따라 1~5등급으로 구분하여 표시토록 함으로써 소비자들이 효율이 높은 에너지절약형 제품을 손쉽게 판단하여 구입할 수 있도록 하고 제조(수입)업자들이 생산(수입)

2) ㎜Hg : 수은주의 높이를 토대로 계산한 압력의 단위로 혈압을 나타내는데 주로 쓰인다.
1 ㎜Hg는 수은주를 1㎜ 높이로 유지하는 데 필요한 압력.

단계에서부터 원천적으로 에너지절약형 제품을 생산·판매하도록 하는 에너지절약을 위한 제도이다. 1등급제품은 5등급보다 30～40% 에너지가 절감된다.

1. 에너지소비효율 등급라벨

최저효율기준은 저효율제품의 확산방지와 생산업체의 기술개발의 촉진을 높이기 위하여 최소한의 효율기준을 설정하여 관리하는 제도로서 개선되지 않은 제품에 대하여는 발견 즉시 생산자와 판매자에게 유통금지토록 하고 있는 제도이다.

목표소비효율은 일정기간 후에 달성해야할 에너지소비효율 목표치를 말한다.

출처: 에너지관리공단 http://www.kemco.or.kr/efficiency_system/grade_mark/system.asp

다음은 에너지 소비 효율 등급을 표시한 제품의 에너지 절감 효과를 비교한 것이다.

품목	사양	에너지소비량		연간 에너지 비용 비교 (단위 : 원)	
		1등급	5등급	1등급	5등급
냉장고	500리터	553kWh	990kWh	44,220	79200
에어컨	10평형	430kWh	500kWh	34,400	40,000
승용차(3등급기준)	1,400cc	1,106.2L	1,413.0L	660,400	843,800
백열전구	60W	36kWh	53kWh	6,426	9,461
형광램프	40W	98kWh	121kWh	7,840	9,680

http://211.114.48.211/pds/59/%C0%FC%B1%E2_%A1%A4_%B0%A1%BD%BA%A1%A4%BC%AE%C0%AF.hwp

1) 1등급과 5등급의 냉장고를 사용할 때, 절약되는 전력으로 60W의 1등급 백열전구를 몇 개까지 더 사용할 수 있는지를 알아보자.

예상되는 답)

더 사용할 수 있는 백열전구의 개수를 x라 하면

$$990-553 \geqq 36x \quad x \leqq 12.1$$ 이다

즉, 1등급의 냉장고를 사용하면 5등급의 경우보다 60W의 1등급 백열전구를 최대 12개 더 사용할 수 있는 전력이 절약된다.

지도초점

대략 얼마'라는 표현은 부등식의 의미를 갖고 있는 것을 뜻함을 이해시킨다.

예) 대략 100개 : $90 \leq x \leq 110$(여러 가능한 표현 중 하나의 예)

2. 자동차의 에너지소비효율등급 표시방법

에너지소비효율 및 등급의 표시방법(라벨)	에너지소비효율 표시방법(라벨)
http://www.kemco.or.kr 에너지관리공단	http://www.kemco.or.kr 에너지관리공단

연비란 1ℓ의 연료로 몇㎞를 주행할 수 있는가 하는 기준으로, 소비자가 차량 구입시 에너지절약형차량을 선택하도록 가이드 역할을 하는 것이며, 공인연비는 미국 LA 시가지를 기준으로 한 표준모드에 의한 연비로서 실주행연비는 교통체증, 도로의 상태, 운전자의 운전방법, 차량의 적재 정도 및 차량상태 등에 따라 공인연비와 차이가 있다.

1) 승용자동차(일반형, 승용겸화물형)의 연비등급을 조사하여 보면 다음과 같다.

(단위 : km/ℓ)

배기량(cc) \ 등급	1	2	3	4	5
800이하	23.6이상	23.5~20.6	20.5~17.6	17.5~14.6	14.5이하
800초과 1,100이하	20.5이상	20.4~17.9	17.8~15.3	15.2~12.7	12.6이하
1,100초과 1,400이하	17.4이상	17.3~15.2	15.1~13.0	12.9~10.8	10.7이하
1,400초과 1,700이하	16.5이상	16.4~14.4	14.3~12.3	12.2~10.2	10.1이하
1,700초과 2,000이하	14.3이상	14.2~12.5	12.4~10.7	10.6~8.9	8.8이하
2,000초과 2,500이하	11.2이상	11.1~9.8	9.7~8.4	8.3~7.0	6.9이하
2,500초과 3,000이하	9.4이상	9.3~8.2	8.1~7.0	6.9~5.8	5.7이하
3,000초과	8.6이상	8.5~7.5	7.4~6.4	6.3~5.3	5.2 이하

http://www.kemco.or.kr/transport/sub01/s_menu02.asp

2) 승용자동차(다목적형·기타형), 승합자동차의 연비등급을 조사하여 보면 다음과 같다.

(단위 : km/ℓ)

등급 / 배기량(cc)	1	2	3	4	5
800이하	16.2이상	16.1～14.1	14.0～12.0	11.9～9.9	9.8이하
800초과 1,100이하	14.8이상	14.7～12.9	12.8～11.0	10.9～9.1	9.0이하
1,500초과 2,000이하	13.3이상	13.2～11.6	11.5～9.9	9.8～8.2	8.1이하
2,000초과 2,500이하	12.2이상	12.1～10.6	11.5～9.9	8.9～7.4	7.3이하
2,500초과 3,000이하	10.1이상	10.0～8.6	8.5～7.2	7.1～5.8	5.7이하
3,000초과	9.5이상	9.4～8.1	8.0～6.7	6.6～5.2	5.1이하

http://www.kemco.or.kr/transport/sub01/s_menu02.asp

소비효율등급 중에서 1등급에 가까울수록 에너지 비용 및 환경오염물질을 줄일 수 있다.

■■ 전화요금체계에서 발견하는 부등식

다음은 신문에 보도된 기사의 일부분이다.

> 얼마 전 정보통신부는 전화요금에 대하여 기본료는 현행 2500원보다 1200원 인상된 3700원으로, 통화료는 현행 3분당 45원에서 6원 인하된 39원으로 조정하기로 결정했다.
>
> 이것은 “기본료를 2000원 인상하고, 통화료는 3분당 7.5원으로 인하하는 조정계획에 대해 시민단체가 반발”하는 등 논란이 제기됨에 따라 수정된 안이다.
>
> 수정된 요금 조정안에 대해 정부는 전화사용빈도가 높은 중산층이나 기업에 대해서는 요금 인하가 효과가 있고, 사용량이 적은 농촌 주민들이나 저소득층에게는 부담이 가중되는 등 물가 정책 차원에서 바람직하지 않은 것으로 보고 있다.

위의 수정안에 대한 근거를 제시하여 보자.

1) 먼저 쉽게 이해할 수 있도록 정리하여 표를 만들어 보시오.

지도초점
먼저 학생들에게 발표를 시키고 아래의 내용을 정리해 준다. (학생의 의견을 수렴하여 정리하는 형식으로 설명해 준다)

예상되는 답)

제시된 내용을 표로 나타내면 다음과 같다.

구분	기존 체계	1차 수정안	최종 수정안
기본료	2500 원	4500 원	3700원
3분당 통화료	45 원	37.5 원	39 원

2) ①기존체계, ②1차 수정안, ③최종 수정안에 대하여 요금을 구하여 보시오.

지도초점
먼저 학생들에게 발표를 시키고 아래의 내용을 정리해 준다. (학생의 의견을 수렴하여 정리하는 형식으로 설명해 준다)

예상되는 답)

보통 3분 통화를 1도수로 하므로, 사용 도수를 x라 하면,
문제에 제시된 세 가지 요금 체계에 대한 사용 요금을 식으로 나타내면
①기존 체계에 따른 사용요금 : $(2500+45x)$ 원
②1차 수정안에 따른 사용요금 : $(4500+37.5x)$ 원
③최종 수정안에 따른 사용요금 : $(3700+39x)$ 원이다.

3) 요금을 체계별로 비교하여 설명하시오.

지도 초점
전체 발표 시간을 권장한다. 학생들의 제시 의견을 여과 없이 그대로 칠판에 적는다. 발표된 내용 중에 모두가 공감하는 방법이 나오도록 유도한다. 모든 학생들이 적극 참여할 수 있도록 유도한다.

예상되는 답)

먼저 기존의 요금 체계와 1차 수정안에 의한 요금 체계를 비교하여 보자.

$$2500 + 45x < 4500 + 37.5x$$

를 만족시키는 x의 값의 범위는 기존의 요금체계가 더 유리한 통화의 범위를 나타낸다. 이 부등식을 풀면

$$7.5x < 2000$$

$$\therefore \ x < 266.66\cdots$$

즉, 266통화(기존요금 14,500원)이하의 사용자에게는 기존의 요금 체계가 더 유리하다. 그래서 사용량이 적은 농촌 주민이나 저소득층에게는 불리해진다는 주장이 제기된 것이다.

다음은 기존의 요금체계와 최종 수정안을 비교하여 본 것이다.

$$2500 + 45x < 3700 + 39x$$

라 하고 부등식을 풀면

$$6x < 1200$$

$$\therefore \ x < 200$$

최종 수정안은 11,500원 이하의 사용자에게 불리하므로 여전히 적은 사용량의 이용자에게 불리하지만 혜택을 얻는 사용자가 조금 늘어났다는 것을 알 수 있다.



심화활동자료

이동전화 요금

우리나라 이동전화 요금구조는 기본료와 통화료(종량제)로 구성된 이부요금제를 택하고 있다. 기본료는 이용자가 이동전화를 언제든 걸거나 받을 수 있도록 시설을 유지하는 데 필요한 최소한의 비용이다.

전화는 거는 사람뿐만 아니라 받는 사람도 편익을 얻는다. 그래서 미국 같은 나라들은 수신자에게도 수신통화료를 받는다.

우리나라는 발신자에게만 요금을 받기 때문에, 기본료가 없다면 수신만 하는 사람은 요금부담 없이 편익을 누리게 된다. 반면에 통화료가 비싸져서 발신자는 부담이 더 커지는 문제가 있다. 기본료는 발신자와 수신자간 요금부담의 형평을 어느 정도 맞춘다는 의미도 있다.

이동전화의 음성통화요금제는 기본료가 비싸면 통화료가 싸고, 기본료가 싸면 통화료가 비싼 구조로 되어 있다. 기본료에는 일정한 무료통화가 포함되어 있는데, 당연히 기본료가 비싼 요금제일수록 무료통화도 많다.

이동전화회사마다 가장 일반적인 이용자를 기준으로 한 '표준요금제'가 있다. 그리고 이 표준요금제를 이용자의 통화패턴에 따라 변형시킨 '선택요금제'가 있다. 선택요금제는 종류가 매우 많다. 물론 선택요금제는 사업자들이 고객을 끌어들이기 위해서 만들었지만 이를 잘 이용하면 요금을 절약할 수 있다. 반대로, 요금제 선택을 잘못해서 비싼 통화료를 무는 경우도 많다. 다량이용자가 기본료 싼 것만 보고 소량요금제를 선택하면 손해다. 자신의 통화패턴에 적합한 요금제를 선택할 수 있어야 하겠다.

최적요금제를 선택하기 위해서는 우선 자신의 통화패턴을 충분히 이해하는 것이 중요하다. 요금제 선택은 요금제별 무료통화 제공시간, 무료 문자메시지 제공건수, 이용시간대 및 이용패턴에 따라 제공되는 각종 할인조건 등을 비교해 보아야 한다.

정보통신부의 인터넷 홈페이지(http://www.mic.go.kr/)를 방문하면 '이동전화 최적요금제 조회'서비스를 제공한다. 음성통화요금을 기준으로 자신의 통화패턴에 맞는 최적의 요금제를 선택하는데 필요한 정보를 제공하는 프로그램으로 입력된 사용자의 여러가지 조건들을 고려하여 최적의 방법(요금제)을 찾아주는 하나의 예가 된다.

지도초점
휴대전화를 사용하고 있는 학생들 각자 또는 가족의 전화요금체계에 대하여 비교하여 보고, 정보통신부의 이동전화 최적요금제 조회서비스페이지에 접속하여 학생 본인 또는 가족의 휴대전화 사용상의 여러가지 조건을 입력하여 실행해 보고 어떤 결과가 나오는지 확인하여 보게 하고, 이러한 프로그램은 어떻게 만들어졌는지를 토론하게 한다.

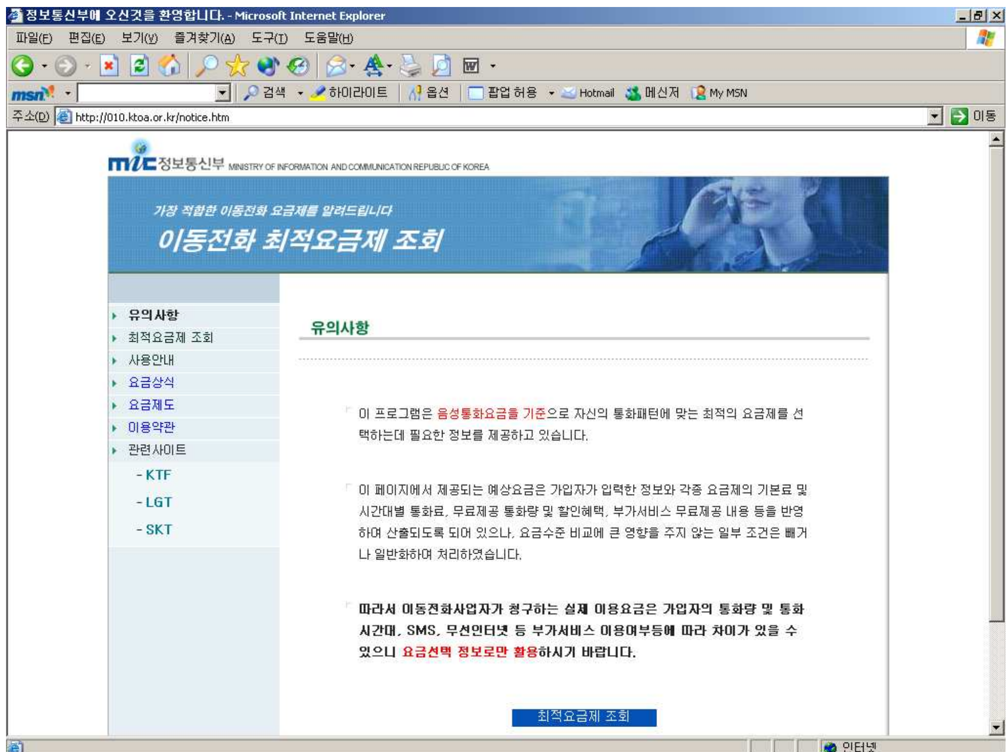
1) 휴대전화를 사용하고 있는 학생들 각자 또는 가족의 휴대전화의 한달 평균 요금에 대하여 고지서(또는 영수증)을 참고하여 아래 표를 작성하고 비교하여 설명해 보세요.

구 성		내 용	과금 단위	요금(원)
음성요금	기본료			
	통화료		도수(10초)당 과금	
부가서비스이용료		발신번호표시, 착신전환 등 이용료	월정액 또는 건당과금	
무선데이터이용료		정보조회 및 수신통신료	도수(10초)당 또는 패킷(512바이트)당 과금	
SMS이용료		문자메시지 이용료	건당 과금	
정보이용료		벨소리, 게임, 음악, 영상 등 이용료	건당 또는 시간당 과금	
부가가치세			요금액의 10%	

2) 정보통신부의 이동전화 최적요금제 조회서비스페이지 (http://www.mic.go.kr/010/ 또는 http://010.ktoa.or.kr/)에 접속하여 학생 본인 또는 가족의 휴대전화 사용에 대한 여러 가지 조건을 입력하여 어떤 결과가 나오는지 확인하여 보세요.

■■ 정보통신부의 이동전화 최적요금제 조회서비스페이지

http://www.mic.go.kr/010/ (또는 http://010.ktoa.or.kr/)



주소(D) http://www.mic.go.kr/010/

mic 정보통신부 MINISTRY OF INFORMATION AND COMMUNICATION REPUBLIC OF KOREA

가장 적합한 이동전화 요금제를 알려드립니다

이동전화 최적요금제 조회

- 유의사항
- 최적요금제 조회
- 사용안내
- 요금상식
- 요금제도
- 이용약관
- 관련사이트
  - KTF
  - LGT
  - SKT

최적요금제 조회

기본 입력사항

» 아래사항 중 1개를 선택하거나 입력하여 주십시오 • 는 필수 입력사항입니다

• 성 별	◉ 남성 ○ 여성
• 연령별	나이 [ ] 세
• 가입이력	○ 신규가입 ○ 기존 ==선택== 요금제명 ==선택== 가입기간 ==선택== ※ 장기가입할인제도 : 장기가입할인제도는 할인기간에 따라 이용요금 할인혜택을 받을 수 있는 제도

» '시간대별 통화비중'을 자신의 통화습관에 맞게 수정하여 주십시오.

시간대별 통화비중	비할인 (08:00~20:00)	심야 (24:00~06:00)	할인 (06:00~08:00)/(20:00~24:00)
	65 %	7 %	28 %

※ 평균 통화비중(비할인/심야/할인) : 일반 65%/7%/28%, 커플 45%/25%/30%, 10대 54%/22%/24%, 20대 59%/18%/23%

» 자신의 '주요 통화습관'을 체크하고 해당 통화비중을 입력하여 주십시오.

주요 통화습관	○ 커플간(1개 번호) 통화량이 많다 ○ 지정번호(2~4 번호) 통화량이 많다 ○ 평일보다 주말(토/공휴일) 통화량이 많다 ○ 집,학교 등 일정지역 통화량이 많다 ○ 통화를 오래하는 편이다(1회 2분 이상 통화, 매일 5분 이상 통화) ○ 일정하지 않다

• 위 통화습관에 해당하는 통화량이 전체의 45 % 정도임

» 수고하셨습니다!!! 방문해 주셔서 감사합니다.

결과보기

• 약정할인제도	○ 사용 18개월 ○ 사용하지 않음 ※ 약정할인제도 : 일정기간 동안 약정한 요금제를 다른 요금제로 변경하지 않는 조건으로 약정기간과 이용금액에 따라 할인혜택을 받을 수 있는 제도
• 주요통화 시간대	○ 일정치않음 ○ 오전 ○ 오후
• 월간사용량	음성통화 [ ]분 단문메세지(SMS) [ ]건 무선인터넷 [ ]Kbyte ※ 부가서비스 형태의 음성통화 옵션요금제 가입자는 옵션요금제 사용량을 제외하여야 합니다 ※ 정액형 학생요금제는 음성통화 기준으로 월평균 60~150분 정도면 발신정지 ※ 자신의 월간 통화량, 통화 시간대를 잘 모르십니까? 신규가입, KTF, LG텔레콤, SKT텔레콤 ※ 무선인터넷 요금은 시간단위 요금제를 기준으로 계산되며, 패킷단위는 반영되지 않음

위의 기본입력 사항만으로 최적요금제 조회 [확인]

» 세부입력 사항까지 입력하시면 보다 정밀한 최적요금제를 조회하실수 있습니다

조회 결과 예시 화면

정보통신부에 오신것을 환영합니다. - Microsoft Internet Explorer

파일(F) 편집(E) 보기(V) 즐겨찾기(A) 도구(T) 도움말(H)

msn 검색 하이라이트 옵션 팝업 허용 Hotmail 메신저 My MSN

주소(D) http://010.ktoa.or.kr/result.jsp 이동

mic 정보통신부 MINISTRY OF INFORMATION AND COMMUNICATION REPUBLIC OF KOREA

가장 적합한 이동전화 요금제를 알려드립니다

이동전화 최적요금제 조회

- 유의사항
- 최적요금제 조회
- 사용안내
- 요금상식
- 요금제도
- 이용약관
- 관련사이트
  - KTF
  - LGT
  - SKT

최적요금제 조회 결과

※ 현재 요금표는 가입기간이 1~2년 미만인 경우임

» 조회 결과 [SKT]

요금제 순위	회사명	요금제명	이용금액	SKT 일반요금기준 요금수준
현재요금제	SKT(011)	팅 100	18,060	67%
1	SKT(011)	팅 500	16,560	61%
2	SKT(011)	팅 100	18,060	67%
3	SKT(011)	팅버디	20,500	76%

* 요금 기준 : 일반(표준)요금(26,882원) more

» 조회 결과 [LGT]

전달되는 버튼 값20

요금제 순위	회사명	요금제명	이용금액	LGT 일반13000기준 요금수준

완료 인터넷

http://010.ktoa.or.kr/result.jsp

3) 정보통신부의 이동전화 최적요금제 조회서비스 프로그램은 어떻게 만들어졌는지 생각해 보고 토론하여 봅시다.



참고자료

1. 참고 서적 및 문헌

① 중학교 2학년 교사용 지도서 수학 8-가(2001), (주) 블랙박스

2. 관련 인터넷 사이트

① http://www.joins.com/ 중앙일보사

② http://www.mathlove.org/doc/activities/
수학사랑, 수업활동자료 - "이런 수업 어때요?"

③ http://www.rtsa.or.kr/ 도로교통안전관리공단, 교통표지판에 대한 안내

④ http://www.kemco.or.kr/ 에너지관리공단

⑤ http://www.mic.go.kr/010/ 정보통신부의 이동전화 최적요금제 조회서비스



학습 활동

실생활 속에서 부등식을 발견하기

우리 주변에는 부등식을 이용하여 나타내는 표현이 많이 있다. 부등식을 생활에 적용하기 위해서 어떤 표현을 쓰고 있는지 관찰, 조사하여 봅시다.

또한 여러분이 부등식을 생활에 적용한다면 어떻게 표시하여 사용하면 좋을까요?

오늘의 활동은 생활 주변에서 부등식을 표현하여 사용하고 있는 예를 발견하고 분석하는 활동입니다. 아울러 관련된 배경지식이나 내용에 대하여도 조사하여 토론하고 같이 알아보도록 합시다.

■■ 가을 산의 단풍 속에서 찾아보는 부등식

해마다 가을이 되면 전국의 산은 고운 단풍으로 옷을 갈아입는다. 인천에 사는 민영이 가족은 이번 가을에 휴가를 내어 아름다운 산을 찾아 단풍놀이를 하려고 한다.

1) 온 식구가 각자 가보고 싶은 산을 이야기하기로 하였다. 아버지는 내장산으로, 어머니는 설악산으로, 오빠는 지리산으로 가고 싶어 한다. 차멀미가 심한 나는 되도록 가까운 산으로 가고 싶다. 의견 수렴을 위하여 제일 먼저 하여야 할 일은 무엇일까요?

2) 전국의 유명한 산의 단풍이 드는 시기를 조사하여 봅시다.

3) 단풍이 드는 시기가 다른 까닭은 무엇일까?

4) 휴가를 10월 15일에서 10월 17일 사이로 잡을 때 단풍놀이로 적당하지 않은 산은 어디인지 조사하여 보시오.



설악산의 단풍
http://www.chosun.com/media/photo/news/200410/200410110137_02.jpg

5) 2)에서 조사한 내용과 오른쪽 표를 참고하여 각 산이 첫단풍이 들기 시작하여 절정기까지의 기간의 절반이 지나면 단풍이 모두 진다고 가정할 때, 단풍이 드는 시기(단풍을 볼 수 있는 시기)를 부등식으로 나타내어 보시오.

산이름	첫단풍(일)	절정기(일)
금강산	9.24	10.11
설악산	9.26	10.13
오대산	9.29	10.15
치악산	10.5	10.20
지리산	10.8	10.17
월악산	10.10	10.21
북한산	10.12	10.25
가야산	10.12	10.26
속리산	10.14	10.26
한라산	10.15	10.30
계룡산	10.15	10.26
팔공산	10.17	10.26
무등산	10.18	10.31
내장산	10.18	11.1
두륜산	10.27	11.10

http://news.joins.com/component/htmlphoto_mmdata/200410/htm_2004100715402430003800-001.JPG

6) 우리생활 속에 숨어 있는 또 다른 부등식의 표현을 찾아봅시다.



학습 활동

■■ 에너지 소비 효율 등급에 나타난 부등식

에너지 소비 효율 등급은 1등급부터 5등급까지가 있으며, 1등급에 가까울수록 에너지 절약형 제품이다. 1등급과 5등급의 에너지 소비량은 냉장고, 에어컨 등 가전제품의 경우에는 30~40%, 승용차의 경우에는 최고 약 60%까지 차이가 난다. '에너지 소비 효율 등급'이 높은 등급의 제품을 사용하면 에너지만 절약되는 것이 아니라, 경제적으로도 상당한 이익이다. 실제로 가장 낮은 등급의 제품 대신 1등급 제품을 선택하는 경우, 냉장고는 평균 약 40%, 에어컨은 평균 약 34%의 전기료를 절약할 수 있다. 또 1400cc승용차를 기준으로 할 경우, 에너지 효율 1등급과 3등급의 연간 휘발유 비용은 약 18만원의 차이가 있다. 중・대형차의 경우 에너지 소비량의 차이는 더욱 커진다.

냉장고, 에어컨, 승용차 등에 '에너지 소비 효율 등급'표기가 붙어있다. 이것은 에너지를 많이 소비하는 제품에 대해 에너지 소비 효율 또는 에너지 사용에 따른 등급을 의무적으로 표시하도록 한 제도이다.

에너지소비효율등급표시제도는 에너지소비효율등급표시, 최저효율기준, 목표소비효율기준 등으로 구성되어 있다.

에너지소비효율등급표시제도는 제품의 에너지소비효율 또는 사용량에 따라 1~5등급으로 구분하여 표시토록 함으로써 소비자들이 효율이 높은 에너지절약형 제품을 손쉽게 판단하여 구입할 수 있도록 하고 제조(수입)업자들이 생산(수입)단계에서부터 원천적으로 에너지절약형 제품을 생산·판매하도록 하는 에너지절약을 위한 제도이다. 1등급제품은 5등급보다 30~40% 에너지가 절감된다.

에너지소비효율 등급라벨

최저효율기준은 저효율제품의 확산방지와 생산업체의 기술개발의 촉진

을 높이기 위하여 최소한의 효율기준을 설정하여 관리하는 제도로서 개선되지 않은 제품에 대하여는 발견 즉시 생산자와 판매자에게 유통금지토록 하고 있는 제도이다.
목표소비효율은 일정기간 후에 달성해야할 에너지소비효율 목표치를 말한다.

http://www.kemco.or.kr/efficiency_system/grade_mark/system.asp 에너지관리공단

다음 표는 에너지소비효율등급을 표시한 제품의 에너지 절감 효과를 비교한 것이다.

품목	사양	에너지소비량		연간 에너지 비용 비교 (단위 : 원)	
		1등급	5등급	1등급	5등급
냉장고	500리터	553kWh	990kWh	44,220	79200
에어컨	10평형	430kWh	500kWh	34,400	40,000
승용차(3등급기준)	1,400cc	1,106.2L	1,413.0L	660,400	843,800
백열전구	60W	36kWh	53kWh	6,426	9,461
형광램프	40W	98kWh	121kWh	7,840	9,680

http://211.114.48.211/pds/59/%C0%FC%B1%E2_%A1%A4_%B0%A1%BD%BA%A1%A4%BC%AE%C0%AF.hwp

1) 1등급과 5등급의 냉장고를 사용할 때, 절약되는 전력으로 60W의 1등급 백열전구를 몇 개까지 더 사용할 수 있는지를 알아봅시다.

2. 자동차의 에너지소비효율등급 표시방법

에너지소비효율 및 등급의 표시방법(라벨)	에너지소비효율 표시방법(라벨)
http://www.kemco.or.kr 에너지관리공단	http://www.kemco.or.kr 에너지관리공단

연비란 1ℓ의 연료로 몇㎞를 주행할 수 있는가 하는 기준으로, 소비자가 차량구입시 에너지절약형차량을 선택하도록 가이드 역할을 하는 것이며, 공인연비는 미국 LA 시가지를 기준으로 한 표준모드에 의한 연비로서 실주행연비는 교통체증, 도로의 상태, 운전자의 운전방법, 차량의 적재정도 및 차량상태 등에 따라 공인연비와 차이가 있다.

1) 일반형 및 승용겸화물형 승용자동차의 연비등급(단위 : km/ℓ)을 조사하여 부등식의 표현으로 다음 표를 채우시오.

차량군	등급 / 배기량(cc)	1	2	3	4	5	기준 연비	등급 간격
제1군								
제2군								
제3군								
제4군								
제5군								
제6군								
제7군								
제8군								

2) 다목적형 승용자동차의 연비등급(단위 : km/ℓ)을 조사하여 부등식의 표현으로 다음 표를 채우시오.

차량군	등급 / 배기량(cc)	1	2	3	4	5
제1군						
제2군						
제3군						



학습 활동

■■ 전화요금체계에서 발견하는 부등식

다음은 신문에 보도된 기사의 일부분이다.

> 얼마 전 정보통신부는 전화요금에 대하여 기본료는 현행 2500원보다 1200원 인상된 3700원으로, 통화료는 현행 3분당 45원에서 6원 인하된 39원으로 조정하기로 결정했다.
>
> 이것은 "기본료를 2000원 인상하고, 통화료는 3분당 7.5원으로 인하하는 조정계획에 대해 시민 단체가 반발"하는 등 논란이 제기됨에 따라 수정된 안이다.
>
> 수정된 요금 조정안에 대해 정부는 전화사용빈도가 높은 중산층이나 기업에 대해서는 요금 인하가 효과가 있고, 사용량이 적은 농촌 주민들이나 저소득층에게는 부담이 가중되는 등 물가 정책 차원에서 바람직하지 않은 것으로 보고 있다.

위의 수정안에 대한 근거를 제시하여 보자.

1) 먼저 쉽게 이해할 수 있도록 정리하여 표를 만들어 보시오.

구분	기존 체계	1차 수정안	최종 수정안
기본료			
3분당 통화료			

2) ①기존체계, ②1차 수정안, ③최종 수정안에 대하여 요금을 구하여 보시오.

보통 3분 통화를 1도수로 하므로, 사용 도수를 x라 하고,
문제에 제시된 세 가지 요금 체계에 대한 사용 요금을 식으로 나타내면
① 기존 체계에 따른 사용요금 : (   )원
② 1차 수정안에 따른 사용요금 : (   )원
③ 최종 수정안에 따른 사용요금 :(   )원이다.

3) 요금을 체계별로 비교하여 설명하시오.



심화 학습활동

정보통신부의 인터넷 홈페이지(http://www.mic.go.kr/)를 방문하면 '이동전화 최적요금제 조회'서비스를 제공한다. 음성통화요금을 기준으로 자신의 통화패턴에 맞는 최적의 요금제를 선택하는데 필요한 정보를 제공하는 프로그램으로 입력된 사용자의 여러가지 조건들을 고려하여 최적의 방법(요금제)을 찾아주는 하나의 예가 된다.

1) 휴대전화를 사용하고 있는 학생들 각자 또는 가족의 휴대전화의 한달 평균 요금에 대하여 고지서(또는 영수증)을 참고하여 아래 표를 작성하고 비교하여 설명해 보세요.

구 성		내 용	과금 단위	요금(원)
음성요금	기본료		월정액(월중에 가입하거나 해지하는 경우 실제 사용일수로 일할계산)	
	통화료		도수(10초)당 과금	
부가서비스이용료		발신번호표시, 착신전환 등 이용료	월정액 또는 건당과금	
무선데이터이용료		정보조회 및 수신통신료	도수(10초)당 또는 패킷(512바이트)당 과금	
SMS이용료		문자메시지 이용료	건당 과금	
정보이용료		벨소리, 게임, 음악, 영상 등 이용료	건당 또는 시간당 과금	
부가가치세			요금액의 10%	

2) 정보통신부의 이동전화 최적요금제 조회서비스페이지 (http://www.mic.go.kr/010/ 또는 http://010.ktoa.or.kr/)에 접속하여 학생 본인 또는 가족의 휴대전화 사용상의 여러가지 조건을 입력하여 어떤 결과가 나오는지 확인하여 보세요.

3) 정보통신부의 이동전화 최적요금제 조회서비스 프로그램은 어떻게 만들어졌는지 생각해 보고 토론하여 봅시다.



2단계 : 개념 이해하기

- 부등식 이해하기, 이용하기

활동 2 부등식의 영역 이해하기

활동 3 최적화하기

활동 2

부등식의 영역 이해하기

실생활 문제를 해결하는 과정에서 수학적인 최적의 해답을 찾기 위한 노력은 계속되어 왔다. 예를 들면 등고선 지도, 평균기온 분포도, 평균 강우량도, 식단을 어떻게 구성하는 것이 가장 경제적인가, 어떤 종류의 농작물을 어떻게 심어야 이익이 최대로 되는가 등을 들 수 있다.
이러한 문제의 해결 방법엔 부등식의 영역의 개념이 내포되어 있다.

이 단계는 좌표평면의 부분집합으로 부등식의 영역을 이해하고, 부등식의 영역을 좌표평면에 그림으로 나타낼 수 있게 하며, 부등식을 이용하여 최대값과 최소값을 구하는 방법을 알게 한다.

<table>
<tr><td rowspan="1">학습 목표</td><td colspan="2">· 부등식의 영역의 뜻을 이해한다.
· 연립부등식의 영역을 좌표평면에 나타낼 수 있다.
· 좌표평면에 그림으로 표시된 영역을 연립부등식으로 나타낼 수 있다.
· 실생활의 여러 문제 상황에서 선형계획법을 적용하여 최대 문제와 최소 문제를 해결할 수 있다.</td></tr>
<tr><td rowspan="2">준비물</td><td>교사용</td><td>· 감자, 칼, 이쑤시개, 자, 필기도구, 모형 산, 수조, 물</td></tr>
<tr><td>학생용</td><td>· 감자, 칼, 이쑤시개, 자, 필기도구, 활동지, 계산기</td></tr>
</table>



교수-학습활동

학습 단계	교수-학습 활동	예상 시간	유의점
도입	· 전체 주제에 대한 소개 및 동기를 유발 시킨다. · 활동안내와 학습목표를 이해시킨다. · 학습 준비물을 확인한다.	5분	· 프로젝트 전체 과정에 대해서 설명하고, 이를 이해하도록 한다.
본 활동	· 감자를 이용하여 등고선 만들기 실습 및 부등식의 영역 이해내기 -활동지[감자를 이용하여 등고선 만들기] -활동지[등고선지도를 가지고 높이에 따라 산을 정면에서 바라본 모양 그리기] · 등고선의 기능과 성질 알아보기 · 일상생활에서 부등식의 영역을 적용한 예를 조사, 탐구하여 발표하고 이야기하기 -활동지[태풍의 피해지역을 부등식의 영역으로 나타내기] -활동지[기상청에서 수집하는 태풍의 여러가지 정보에 대하여 조사하기] -활동지[태풍의 이름에 얽힌 배경을 조사, 발표하고 직접 작명을 해보기] -활동지[절대값을 포함하고 있는 함수를 이용하여 운송비용의 최소값 구하기]	120분	· 모든 학생들이 참여하도록 독려한다. · 학생들의 활동이 문제의 본질에서 벗어나지 않도록 유의한다. · 학습목표 외적인 질문에서 학생의 의견을 수렴하도록 노력하면서 수업의 방향으로 유도한다. · 개인별, 모둠별로 조사하고자 하는 방법의 다양성을 인정한다. · 논리적 추론 근거의 중요성을 강조한다.
정리	· 최적의 선택을 위해 부등식이 어떤 역할을 하는지 토의해 본다.	10분	· 학생들이 다양한 의견을 제시하고 적극적인 참여할 수 있도록 유도한다.



주요 초점질문

1. 생활 속에서 발견할 수 있는 부등식의 영역의 문제는 어떤 것이 있습니까?
2. 부등식의 영역에서 최대값과 최소값을 어떻게 구할 수 있습니까.
3. 절대값을 포함하고 있는 함수를 이용하여 최소값을 구할 수 있습니까?



지도 활동

부등식의 영역 이해하기

실생활에서 부등식의 영역의 개념이 내포되어 있는 것들이 있다.

등고선 지도, 평균 기온 분포도, 평균 강우량도 등이다. 이런 것들은 어떤 부등식을 만족하는 집합을 그림으로 나타낸 것이다. 등고선은 지표면에서 해발 고도가 같은 여러 지점을 이어 놓은 선이다.

등고선은 지형의 기복을 나타내는 데 편리하여 1799년 프랑스의 뒤팽 트리엘이 최초로 프랑스의 지도를 작성할 때 사용했으며, 그 후 세계 각국에서 지형도에서는 등고선을 사용하여 지표의 기복을 표현하고 있다. 등고선은 일종의 등치선(等值線)이므로 계량적인 분석이 가능하여 등고선이 지형도에 이용된 이후 지형을 보다 과학적으로 계측 ·분석할 수 있게 되었다.

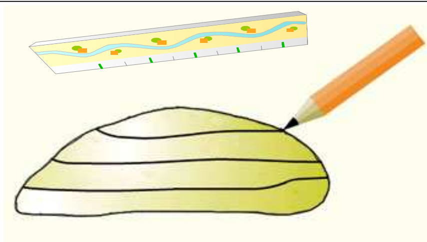
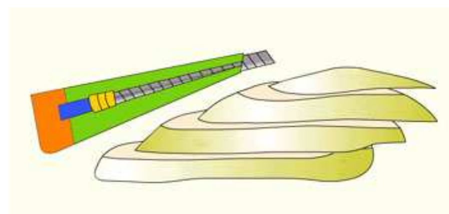
출처 : http://100.naver.com/100.php?id=52051

지형도는 부등식의 영역을 등고선과 색깔로 구분하여 나타내는 예가 된다.

■■ 감자를 이용하여 등고선을 만들어 보고 부등식의 영역을 이해하자.

1. 실습하기

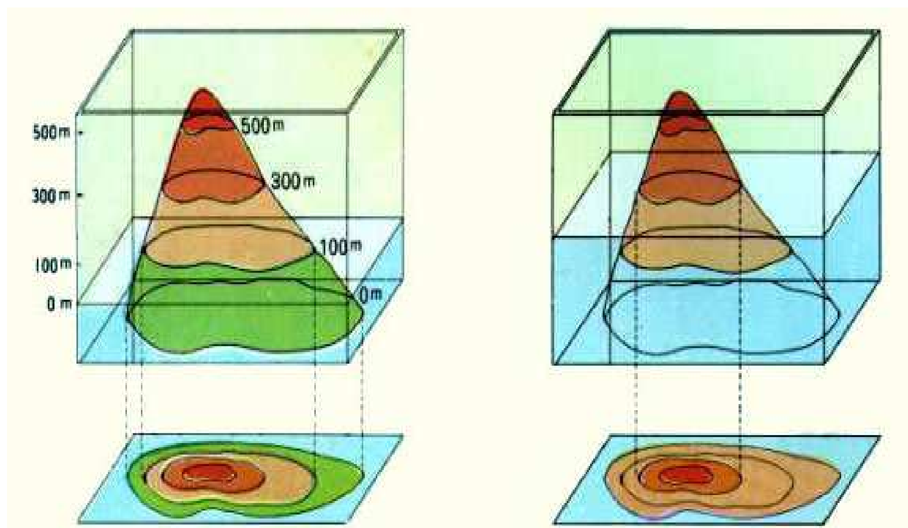
지도초점 혼자서 실습하기 어려운 경우 두 명씩 1개조로 편성하여 해도 좋다.

	
1) 자를 이용하여 감자에 일정한 간격으로 선을 긋는다	2) 그어진 선대로 감자를 자른다.

3) 이쑤시개를 이용하여 중심선을 맞춘다.	4) 가장자리를 연필로 그린다.
5) 높이에 따라 각각 초록, 노랑, 갈색, 고동색 등의 색깔로 칠한다	

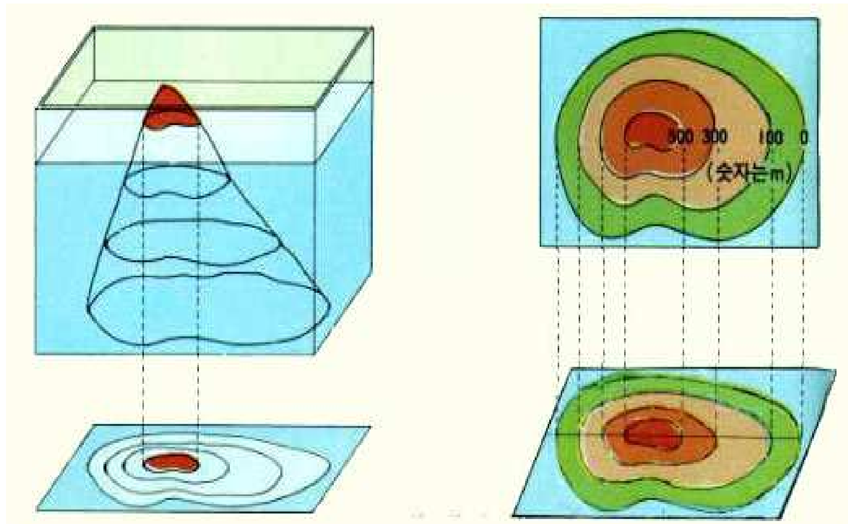
http://cont1.edunet4u.net/hjp0405/4-1-1-3/감자등고선.htm

2. 등고선 나타내는 법

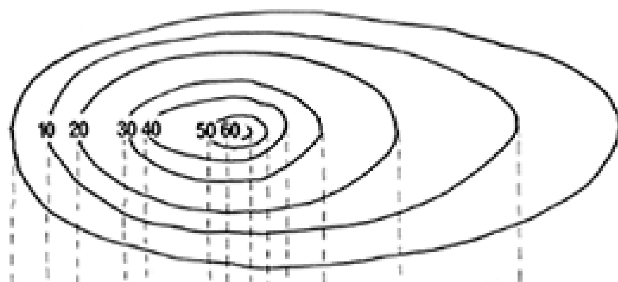


수조에 모형의 산을 넣고, 물을 부으면 모형의 산에 물과 닿은 선이 생긴다. 이

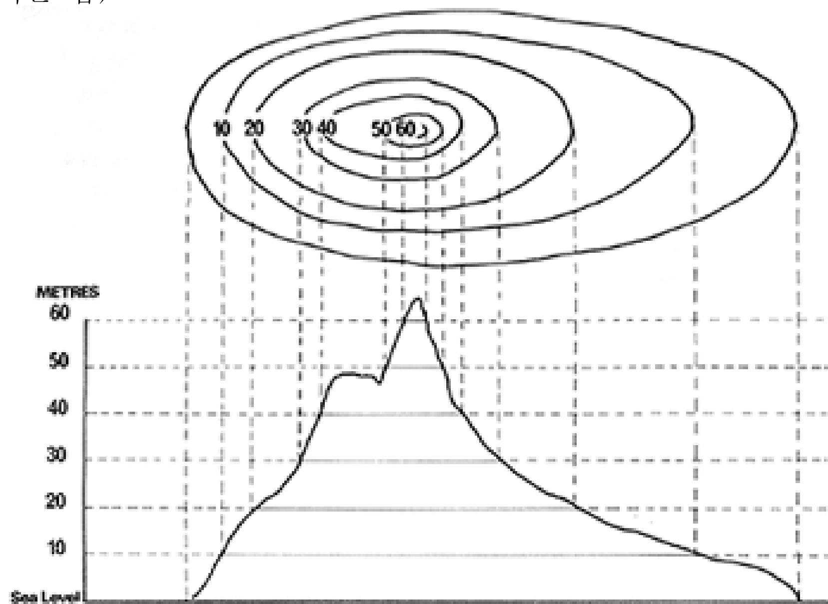
선이 지도의 등고선에 해당한다. 수조 위에서 내려다보면 등고선과 산의 높이의 관계를 이해할 수 있다.



1) 간단한 등고선 지도를 가지고 산을 정면에서 바라본 모양을 높이에 따라 그려 보세요.



예상되는 답)

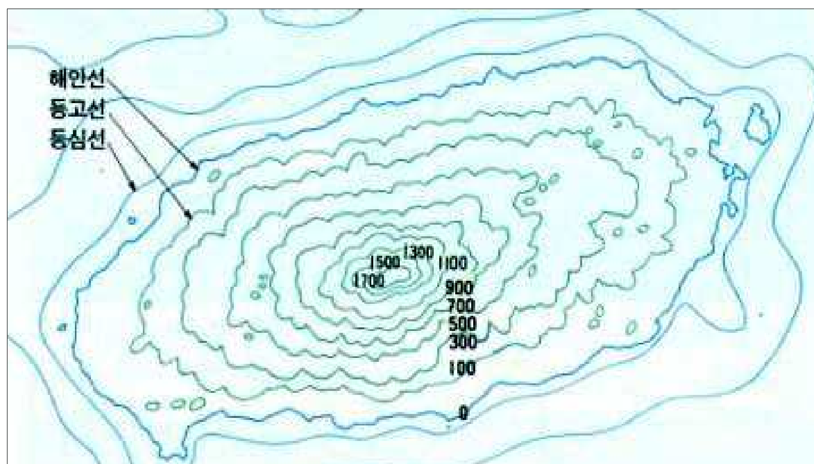


http://www.mountaineering.co.kr/lesson/basic/b7/contour_draw.gif

2) 그려진 산의 그림을 모둠별로 비교하여 보세요.

3) 다음의 등고선 지도에서 선의 의미는 무엇인지 설명하시오.

등고선 지도



http://cont1.edunet4u.net/hjp0405/4-1-1-3/images//지도%20등고선.jpg

그림에 나타나 있는 등고선 지도는 해발 고도가

0 m 이상 100m 미만
100 m 이상 300m 미만
300 m 이상 500m 미만
500 m 이상 700m 미만
900 m 이상 1100m 미만
1100 m 이상 1300m 미만
1300 m 이상 1500m 미만
1500 m 이상 1700m 미만
1700 m 이상

인 9개의 지역으로 나누어 나타내고 있다.

등고선은 해면을 기준으로 높이가 같은 곳을 선으로 연결하여 땅의 높고 낮음을 지도에 나타내는 것이다. 등고선의 간격이 좁아지면 경사가 급한 곳이고 등고선의 간격이 넓어지면 경사가 완만한 곳이다.

땅의 높낮이를 나타내기 위해 사용하는 등고선과 등심선이 있다
같은 높이나 깊이의 선을 이었을 때 바닷물과 맞닿아 있는 선을 '해안선'이라 하고, 해안선보다 높은 곳의 선을 '등고선'이라 하며 해안선보다 낮은 곳의 선을 '등심선'이라 부른다.

4) 색깔을 달리하여 땅이나 바다의 높낮이를 나타내는 방법이 있다.

색깔로 나타낼 때 육지 중에, 들은 초록색으로, 산지는 노랑이나 갈색으로 나타내며 산이 높을수록 진한 색으로 나타낸다.

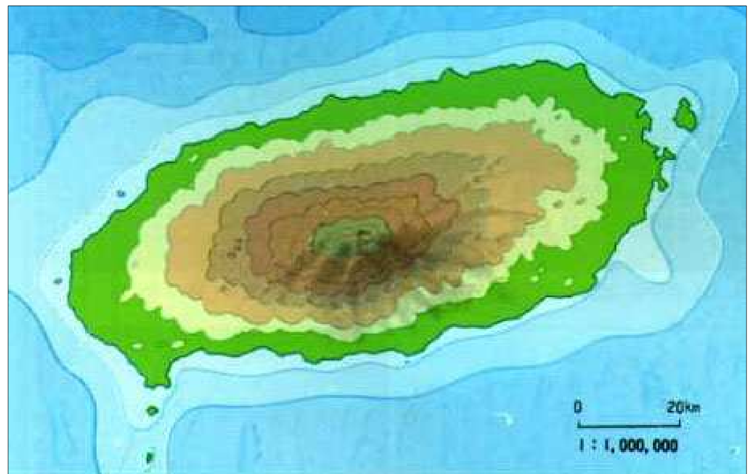
강이나 바다는 파랑으로 나타내며, 수심이 낮은 곳은 연하게, 수심이 깊어질수록 파랑이 진하게 표시한다.

색깔로 나타내기

등고선이란

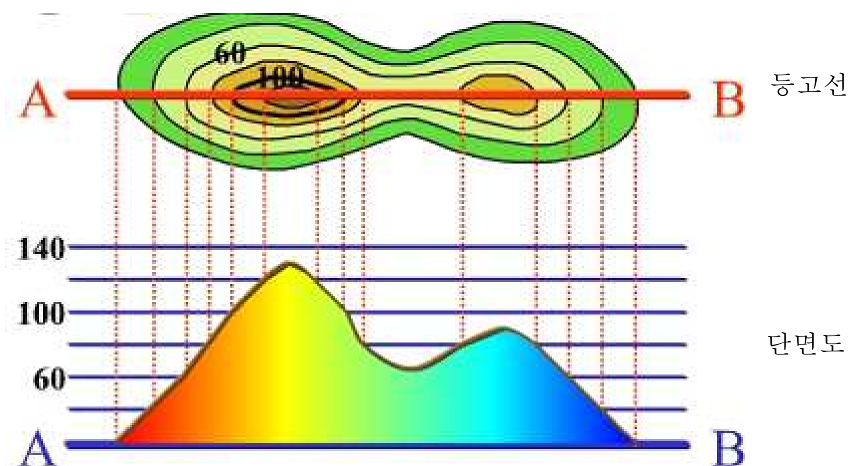
등고선은 평균 해수면으로부터 일정한 높이에 있는 지점(點)을 연결한 선이며 점 하나하나는 높이를 나타내지만 그 이음의 연속선은 지형을 나타낸다. 즉, 등고선은 기준면 "0"m인 평균 해수면에서 수직거리로 나타낸다. 또한 기준면(수준면)과 평행하는 수평곡선이기도 하다. 지형의 높이에 따라 서로 다른 수평곡선(등고선)을 지도상에 투영하면 지표면에 대한 고저의 기복(起伏), 경사의 완급(緩

急) 등이 나타나게 된다.

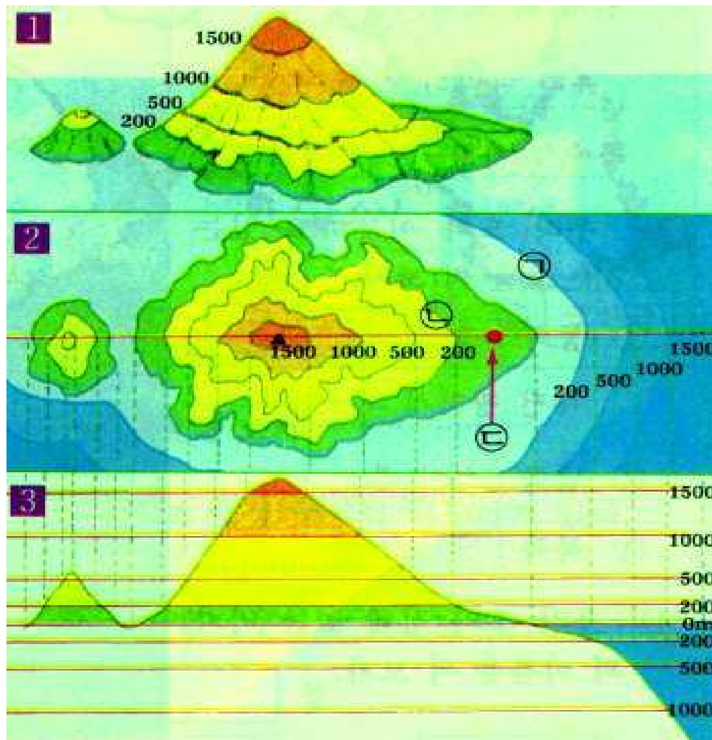


http://cont1.edunet4u.net/hjp0405/4-1-1-3/images/지도%20등고선.jpg

등고선은 축척(縮尺)이 작은 지도를 제외하고는 일반적으로 일정한 해발고도 차마다 표시된다. 이를 등고선간격이라고 일컫는데, 이는 지도의 축척과 토지의 기복·경사 상태로 정해진다. 등고선의 군데군데에는 그 해발고도의 값이 표시된다. 지도에서 등고선이 접근해 있을수록 급경사이고, 또 등고선이 안쪽으로 파고 들어간 데가 골짜기 부분, 반대로 바깥쪽으로 삐져나간 데가 능선 부분이다. 등고선 중 일정한 간격마다 실선으로 그려진 것을 주곡선(主曲線), 굵은 실선으로 그려진 것을 계곡선(計曲線)이라 한다. 또 자잘한 기복을 표현하기 위해 필요한 곳에서는 등고선 간격의 1/2 또는 1/4 등에 해당되는 해발고도의 조곡선(助曲線)이 쓰이는데 이것은 점선으로 표시된다.



http://cbingoimage.naver.com/data3/bingo_67/imgbingo_2/qpal1234100/24940/qpal1234100_1.jpg



http://myhome.naver.com/kjy9964/images/dynggosun.jpg

등고선에 대한 참고사항을 요약하면 다음과 같다.

가. 등고선의 기능(技能)

(1) 고도(高度) 표현

기준면으로부터 어느 지점까지의 수직거리를 나타낸다.

(2) 기복(起伏) 표현

지형의 모양과 특징을 나타낸다.

나. 등고선의 성질(性質)

(1) 폐곡선

지표면상의 수평면을 자른 면이기 때문에 지도상에 나타난 등고선은 서로 만난다.

(2) 등고선의 결합과 교차

등고선은 지형이 돌출(오버행:overhang)되거나 절벽이 아니면 서로 합치거나 교차하지 않는다.

(3) 경사의 표현

등고선의 간격이 좁으면 급하고 넓으면 완만하다.

(4) 산정(봉우리)

등고선들 중에서 제일 작은 원으로 나타난 곳이 산정 또는 봉우리이다.

(5) 능선

정상에서 능선이 발전해 나가는 형태는 "∩"형 또는 "∧"형이다(계곡에서 볼 때는 ∪자와 ∨자 형태).

(6) 계곡(하천)

정상이나 능선에서 계곡(하천)이 발전해 나가는 형태는 "∪"자 또는 "∨"자형이다(계곡에서 볼 때는 ∪자와 ∨자를 거꾸로 한 형태).

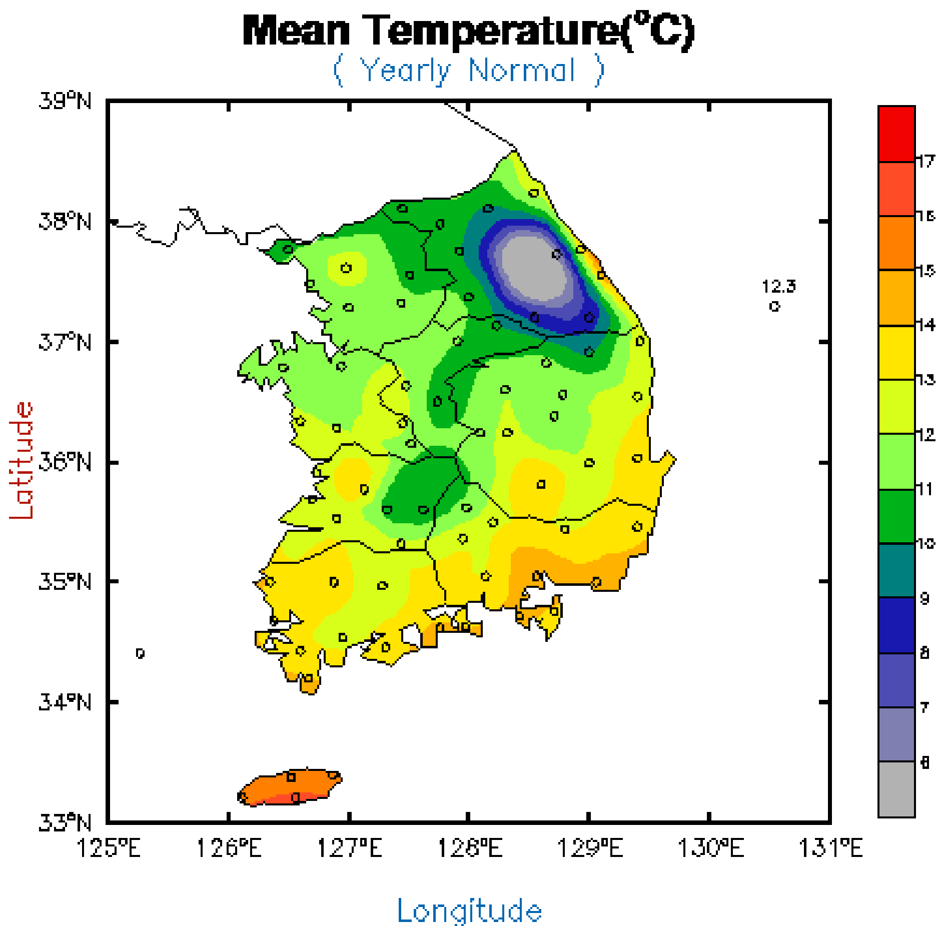
∪·∩자 형은 평평하고 넓은 능선이나 계곡을 나타내며 소로가 있을 가능성이 높다.

∧·∨자 형은 칼날 능선이나 협곡을 나타내며 소로가 없을 가능성이 높다.

출처 http://www.mapschool.co.kr/main03_main05.htm 독도법에 관한 자료 제공

■■ 생활 속에서 부등식의 영역의 또 다른 예를 조사하여 보자.

지도 초점 학생들의 자발적인 활동과 발표를 유도하고, 예로 기상청의 인터넷 홈페이지를 방문하여 아래와 같은 연 평균기온도, 강수량도, 이 내용에 대한 수업을 하는 시기의 월 평균기온도, 강수량도 등을 검색하게 한 후 발표를 시킨다. 모든 학생들이 적극 참여할 수 있도록 지도한다.



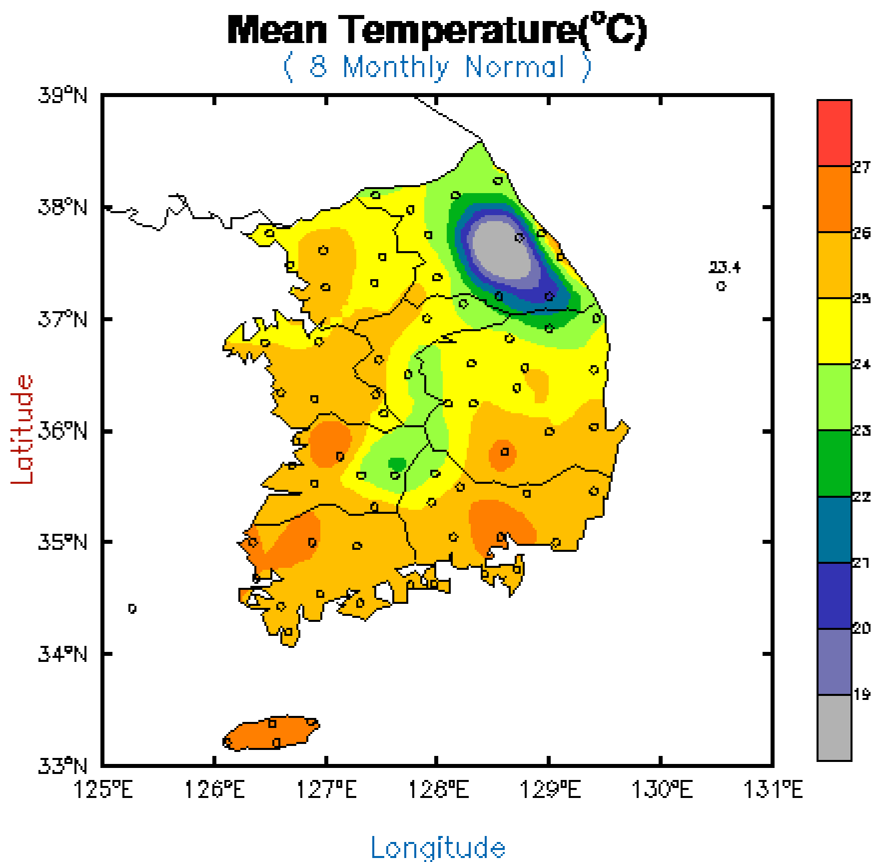
평균기온(2003년) http://www.kma.go.kr/climate/kihudo/img/nor-temp-avg13.gif

1) 위 기상도는 연평균기온을 나타낸 것입니다. 각 색깔이 의미하는 것은 무엇인가요?

예상되는 답)
기온의 차를 의미한다. 따뜻한 색깔은 더 높은 기온을 의미한다.

2) 자기가 살고 있는 고장의 연평균기온을 알아봅시다.
예상되는 답)
기상도에서 각자 살고 있는 고장의 평균기온을 찾아보고 대답한다.

3) 평균기온이 가장 높은 지역과 가장 낮은 지역의 기온은 몇 ℃이며, 차이는 얼마인가요?
예상되는 답) 최고 기온 : (제주도) 17~18℃, 최저 기온 : (설악산) 5~6℃, 차이 : 11~13℃



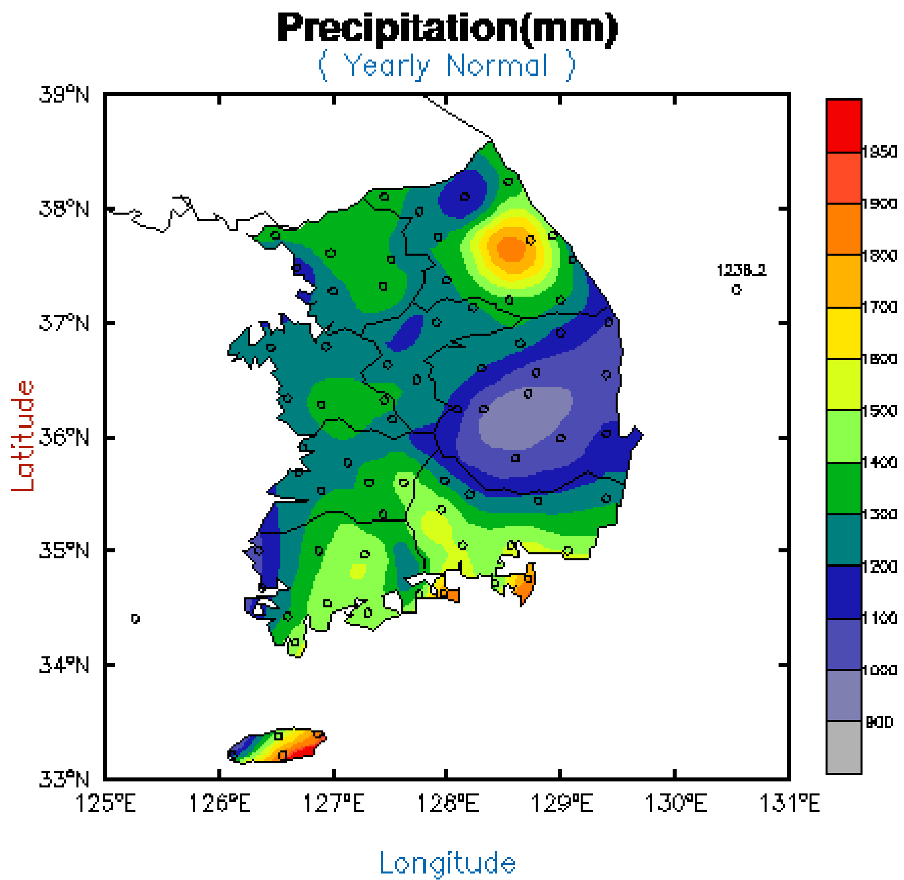
평균기온(8월) http://www.kma.go.kr/climate/kihudo/img/nor-temp-avg08.gif*

1) 위 기상도는 8월 평균기온을 나타낸 것입니다. 각 색깔이 의미하는 것은 무엇

인가요?
예상되는 답)
기온의 차를 의미한다. 따뜻한 색깔은 더 높은 기온을 의미한다.

2) 자기가 살고 있는 고장의 8월의 평균기온을 알아봅시다.
예상되는 답)
기상도에서 각자 살고 있는 고장의 8월의 평균기온을 찾아보고 대답한다.

3) 8월의 평균기온이 가장 높은 지역과 가장 낮은 지역의 기온은 몇 ℃이며, 차이는 얼마인가요?
예상되는 답) 최고 기온 : 27~28℃, 최저 기온 : 18~19℃, 차이 : 8~10℃



강수량
http://www.kma.go.kr/climate/kihudo/img/nor-pre13.gif

1) 위 기상도는 연 평균 강수량을 나타낸 것입니다. 각 색깔이 의미하는 것은 무엇인가요?

예상되는 답) 기온의 차를 의미한다. 따뜻한 색깔은 더 많은 강수량을 의미한다.

2) 자기가 살고 있는 고장의 연평균 강수량을 알아봅시다.

예상되는 답)

기상도에서 각자 살고 있는 고장의 연평균 강수량을 조사하여 보고 대답한다.

3) 연평균 강수량이 가장 높은 지역과 가장 낮은 지역의 강수량은 몇 ㎜이며, 차이는 얼마인가요?

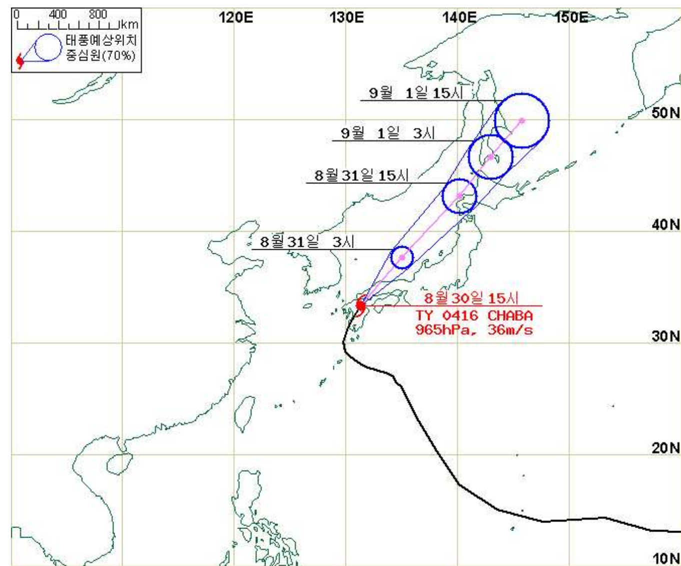
예상되는 답) 최다 강수량 : 1950㎜이상, 최소 강수량 : 800~1000㎜, 차이 : 950㎜이상

■■ 태풍의 피해 지역은?

기상청의 인터넷 홈페이지를 방문하여 우리나라에 큰 피해를 주었던 태풍의 진로를 조사하여 부등식의 영역으로 표시하여 보자.

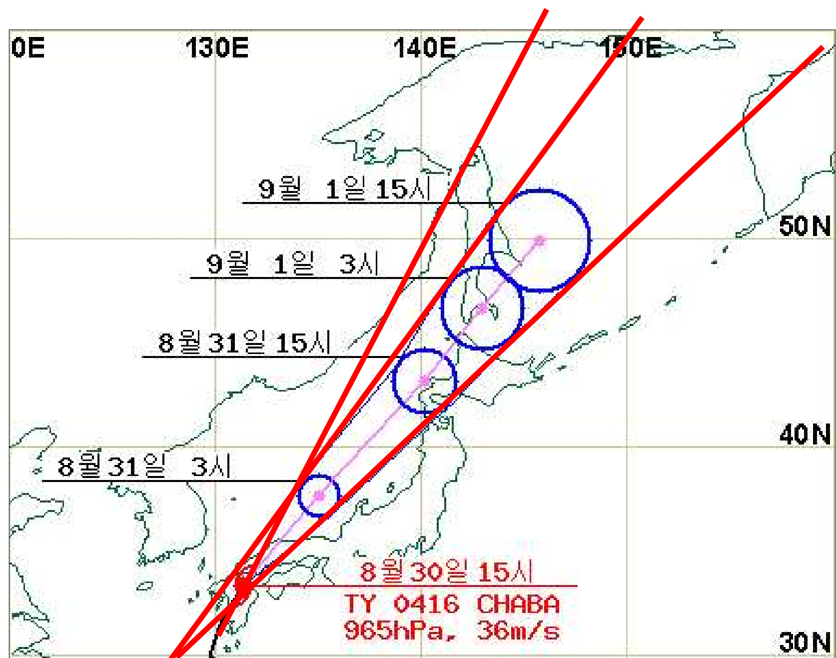
지도초점 먼저 학생들에게 조사를 하게 한 후 발표를 시켜 본다. 조사가 여의치 않거나 활동이 부진하면 아래의 내용을 활동지로 제작하여 수업에 이용한다. 아래 그림을 보여준 후 부분 확대한 그림을 활동지(모눈용지)에 옮겨 놓고 좌표로 표시하게 하고, 꺾이는 부분을 직선으로 간주하여 부등식의 영역을 수식으로 나타내어 보게 하고, 자신있는 학생들은 꺾이는 점마다 다른 수식을 만들어 보게 유도한다.

<원 기상도>



http://sky.kma.go.kr/fcst/typ_rpt/typ_200408301630_16_019.png
기상청

<부분 확대 기상도>

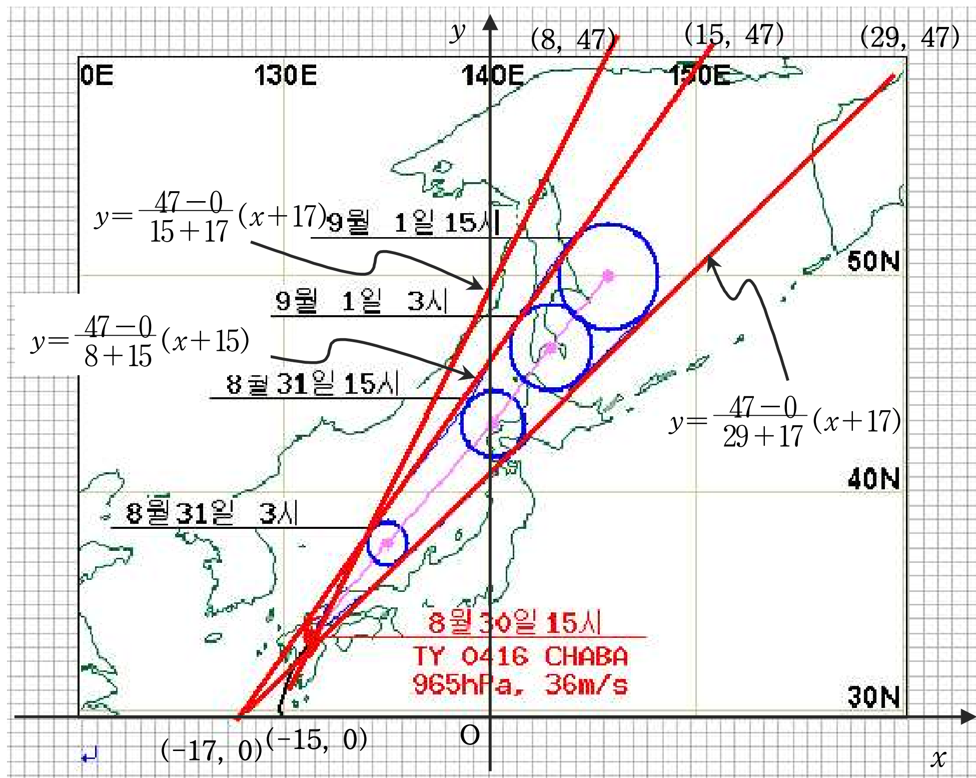


http://sky.kma.go.kr/fcst/typ_rpt/typ_200408301630_16_019.png 기상청

1) 좌표를 표시하고 경계선에 해당하는 직선의 방정식을 구해 보시오.

지도 초점 활동지에 좌표를 표시하여 구해 보도록 지도한다. 이 때, 좌표축을 어떻게 설정하는가에 따라 직선의 방정식이나 부등식의 영역이 달라질 수 있음을 주지시킨다.

예상되는 답)



2) 주어진 사각형 안에서 태풍의 피해지역을 연립부등식으로 나타내어 보시오.

예상되는 답)

$$\begin{cases} y \le \frac{47}{32}(x+17) \\ y \le \frac{47}{23}(x+15) \\ y \ge \frac{47}{46}(x+17) \end{cases}$$

3) 태풍에 대처하기 위하여 기상청에서 수집하는 여러가지 정보에 대하여 조사하여 보자.

지도초점 기상청에서는 태풍의 진로를 세밀하게 관측하여 가능한 모든 정보를 수집하고 공개하여 피해를 줄이고 대처하기 위해 노력한다. 그러한 과정에서 아래 표와 같은 자료들이 조사가 되며 이 자료들이 가지는 의미와 가치에 대하여 학생들에게 설명하여 준다. 태풍의 이름에 얽힌 배경을 조사, 발표하게 하고 학생들이 직접 작명을 해보게 한다.

태풍명: 제 16호 태풍 '차바(CHABA)' **발표시간:** 2004년 08월 30일 16:30
태풍상황: 시각: 2004년 08월 30일 15시 현재 위치: 33.4 N, 131.3 E(일본 후쿠오카 동남동쪽 약 80 km 부근 지점) 진행 방향 및 속도: NNE, 35 km/h 중심기압: 965 hPa 중심부근 최대풍속: 36 m/s 풍속: 25m/s, 반경: 태풍중심 반경 약 240km 이내 (서쪽반경 약 150km 이내) 풍속: 15m/s, 반경: 태풍중심 반경 약 500km 이내 (서쪽반경 약 300km 이내)
예상위치 08월 31일 03시 : 37.7 N, 135.0 E (울릉도 동쪽 약 370 km 부근 해상)를 중심으로 한 반경 120km 범위 (최대풍속 및 중심기압 : 35 m/s, 970 hpa) 08월 31일 15시 : 43.2 N, 140.2 E (일본 삿포로 서쪽 약 90 km 부근 해상)를 중심으로 한 반경 180km 범위 (최대풍속 및 중심기압 : 35 m/s, 970 hpa) 09월 01일 03시 : 46.7 N, 142.9 E (일본 삿포로 북북동쪽 약 410 km 부근 해상)를 중심으로 한 반경 230km 범위 (최대풍속 및 중심기압 : 33 m/s, 975 hpa) 09월 01일 15시 : 50.0 N, 145.7 E (일본 삿포로 북북동쪽 약 840 km 부근 해상)를 중심으로 한 반경 280km 범위
참고사항 제16호 태풍[차바(CHABA)]는 태국에서 제출한 이름으로 [열대의 꽃]을 의미함

출처 http://sky.kma.go.kr/fcst/typ_rpt/typ_200408301630_16_019.png 기상청

태풍의 이름

태풍은 일주일 이상 지속될 수 있으므로 동시에 같은 지역에 하나 이상의 태풍이 있을 수 있기 때문에 이때 발표되는 태풍 예보를 혼동하지 않도록 하기 위하여 태풍 이름을 붙이게 되었다. 태풍에 이름을 붙이기 시작한 것은 1953년부터이다.

태풍에 처음으로 이름을 붙인 것은 호주의 예보관들이었다. 그 당시 호주 예보관들은 자신이 싫어하는 정치가의 이름을 붙였는데, 예를 들어 싫어하는 정치가의 이름이 앤더슨이라면 “현재 앤더슨이 태평양 해상에서 헤매고 있는 중입니다” 또는 “앤더슨이 엄청난 재난을 일으킬 가능성이 있습니다”라고 태풍 예보를 했다. 제2차 세계대전 이후, 미공군과 해군에서 공식적으로 태풍 이름을 붙이기 시작했는데 이때 예보관들은 자신의 아내나 애인의 이름을 사용했다. 이러한 전통에 따라 1978년까지는 태풍 이름이 여성이었다가 이후부터는 남자와 여자 이름을 번갈아 사용하였다.

북서태평양에서의 태풍 이름은 1999년까지 괌에 위치한 미국 태풍합동경보센터에서 정한 이름을 사용했다. 그러나 2000년부터는 아시아태풍위원회에서 아시아 각국 국민들의 태풍에 대한 관심을 높이고 태풍 경계를 강화하기 위해서 태풍 이름을 서양식에서 아시아 지역 14개국의 고유한 이름으로 변경하여 사용하고 있다.

태풍 이름은 각 국가별로 10개씩 제출한 총 140개가 각 조 28개씩 5개조로 구성되고, 1조부터 5조까지 순차적으로 사용한다. 140개를 모두 사용하고 나면 1번부터 다시 사용하기로 정했다. 태풍이 보통 연간 약 30여 개쯤 발생하므로 전체의 이름이 다 사용되려면 약 4~5년이 소요될 것이다.

우리나라에서는 ‘개미’, ‘나리’, ‘장미’, ‘수달’, ‘노루’, ‘제비’, ‘너구리’, ‘고니’, ‘메기’, ‘나비’ 등의 태풍 이름을 제출했고, 북한에서도 ‘기러기’ 등 10개의 이름을 제출했으므로 한글 이름의 태풍이 많아졌다.

2004년 개정된 태풍이름 2004. 1. 1 현재

국가명	1조	2조	3조	4조	5조
캄보디아	돔레이 Damrey	콩레이 Kong-rey	나크리 Nakri	크로반 Krovanh	사리카 Sarika
중국	롱방 Longwang	위투 Yutu	평셴 Fengshen	두지앤 Dujuan	하이마 Haima
북한	기러기 Kirogi	도라지 Toraji	갈매기 Kalmaegi	매미 Maemi	메아리 Meari

국가명	1조	2조	3조	4조	5조
홍콩	카이탁 Kai-tak	마니 Man-yi	퐁웡 Fung-wong	초이완 Choi-wan	망온 Ma-on
일본	덴빈 Tembin	우사기 Usagi	간무리 Kammuri	곳푸 Koppu	도카게 Tokage
라오스	볼라벤 Bolaven	파북 Pabuk	판폰 Phanfone	켓사나 Ketsana	녹텐 Nock-ten
마카오	잔쯔 Chanchu	우딥 Wutip	봉퐁 Vongfong	파마 Parma	무이파 Muifa
말레이시아	절라왓 Jelawat	서팟 Sepat	누리 Nuri	멀로 Melor	머르복 Merbok
미크로네시아	이위냐 Ewiniar	피토 Fitow	신라쿠 Sinlaku	니파탁 Nepartak	난마돌 Nanmadol
필리핀	빌리스 Bilis	다나스 Danas	하구핏 Hagupit	루핏 Lupit	탈라스 Talas
한국	개미 Kaemi	나리 Nari	장미 Changmi	수달 Sudal	노루 Noru
태국	프라피룬 Prapiroon	위파 Wipha	매클라 Mekkhala	니다 Nida	굴랍 Kulap
베트남	사오마이 Saomai	레기마 Lekima	바비 Bavi	콘손 conson	손카 Sonca
캄보디아	보파 Bopha	크로사 Krosa	마이삭 Matsak	찬투 Chanthu	네삿 Nesat
중국	우콩 Wukong	하이옌 Haiyan	하이센 Haishen	디앤무 Dianmu	하이탕 Haitang
북한	소나무 Sonamu	버들 Podul	봉선화 Pongsona	민들레 Mindulle	날개 Nalgae
홍콩	산산 Shanshan	링링 Lingling	야냔 Yanyan	팅팅 Tingting	바냔 Banyan
일 본	야기 Yagi	가지키 Kajiki	구지라 Kujira	곤파스 Kompasu	와시 Washi
라오스	샹산 Xangsane	파사이 Faxai	찬홈 Chan-hom	남테우른 Namtheun	맛사 Matsa
말레이시아	룸비아 Rumbia	타파 Tapah	낭카 Nangka	머란티 Meranti	마와 Mawar
마카오	버빈카 Bebinca	페이파 Peipah	린파 Linfa	말로우 Malou	산우 Sanvu

국가명	1조	2조	3조	4조	5조
미크로네시아	솔릭 Soulik	미톡 Mitag	소델로 Soudelor	라나님 Rananim	구촐 Guchol
필리핀	시마론 Cimaron	하기비스 Hagibis	몰라베 Molave	말라카스 Malakas	탈림 Talim
한 국	제비 Chebi	너구리 Noguri	고니 Koni	메기 Megi	나비 Nabi
태 국	두리안 Durian	라마순 Rammasun	모라콧 Morakot	차바 Chaba	카눈 Khanun
미 국	우토 Utor	마트모 Matmo	아타우 Etau	아이에라이 Aere	비센티 Vicente
베트남	차미 Trami	할롱 Halong	밤코 Vamco	송다 Songda	사올라 Saola

※ 태풍이름의 의미를 알아볼 수 있는 곳:
http://www.kma.go.kr/kmas/kma/data/data05_wind4-1.jsp

■■ 부등식을 이용한 비용 절약

-운송비용을 최소로 하려면 어떻게 할까요?

경부고속도로를 이용하여 서울, 대전, 부산의 각 대리점에 물건을 공급하는 공장을 지으려고 한다. 서울에서 대전까지의 거리는 167km, 서울에서 부산까지의 거리는 445km이다. 운송비용을 최소로 하려면 어느 곳에 공장을 짓는 것이 바람직하겠는가? (단, 고속도로가 정체되는 일은 없다고 한다).



http://www.freeway.co.kr/html/lifefreeway/map/images/sub02_03/sub02_03_img01.jpg

운송거리가 최소가 되려면 이동하는 거리가 최소가 되어야 한다. 고속도로를 따라서 이동하므로 고속도로를 직선으로 생각하여도 이동거리에는 변화가 없다.

서울을 원점으로 하고 대전, 부산, 공장의 위치를 각각 수직선 위의 점으로 생각하고 각 점을 좌표로 표시하여 이동거리가 최소가 되도록 공장의 좌표를 구하면 공장의 위치를 찾을 수 있다.

고속도로 위를 움직이므로 수직선 위에 서울을 원점 O로 잡으면 좌표가 167인 점 A를 대전, 좌표가 445인 점 B를 부산으로 놓고 공장이 위치한 점을 X라하고 점 X의 좌표를 x라 놓으면 이동거리는

$$\overline{OX}+\overline{AX}+\overline{BX}$$

이다.

$$\overline{OX}+\overline{AX}+\overline{BX}=|x|+|x-167|+|x-445|$$

이므로, $f(x)=|x|+|x-167|+|x-445|$ 라 하고 $f(x)$가 최소일 때의 x값을 구하면 된다.

$f(x)$는 절대값을 포함하고 있는 함수이므로 구간별로 나누어 함수를 구하면

ⅰ) $x<0$ 일 때

$$f(x)=|x|+|x-167|+|x-445|=-x-(x-167)-(x-445)=-3x+612$$

ⅱ) $0\leqq x<167$ 일 때

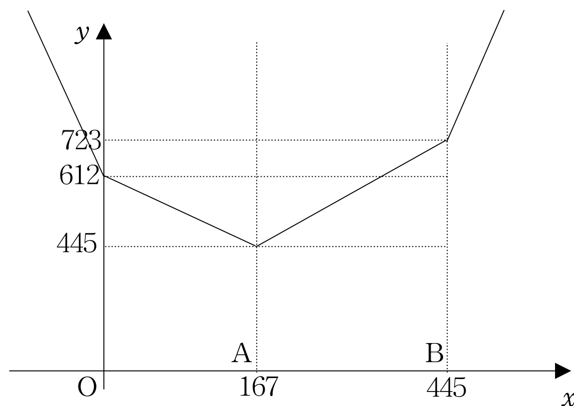
$$f(x)=|x|+|x-167|+|x-445|=x-(x-167)-(x-445)=-x+612$$

ⅲ) $167\leqq x<445$ 일 때

$$f(x)=|x|+|x-167|+|x-445|=x+(x-167)-(x-445)=x+278$$

ⅳ) $x\geqq 445$ 일 때

$$f(x)=|x|+|x-167|+|x-445|=x+(x-167)+(x-445)=3x-612$$



$f(x)$의 그래프를 그리면 그림과 같고 x가 167일 때 최소값이 되므로 공장을 대전에 세우면 이동거리가 최소가 되어 운송비용이 최소가 된다.



참고자료

1. 참고 서적 및 문헌

① Eves, H., 이우영・신항균 역(1999), 수학사, 경문사

② 나카다 노리오 지음 김미옥 옮김, 박부성 감수(2001), 디즈니랜드에서 수학을 배우자, 이지북

2. 관련 인터넷 사이트

① http://www.kma.go.kr/ 기상청

② http://cont1.edunet4u.net/hjp0405/ 지리학습site로 등고선에 관한 안내

③ http://100.naver.com/ 네이버 백과사전

④ http://www.mapschool.co.kr/ 독도법에 관한 자료 제공

⑤ http://www.mountaineering.co.kr/ 등산학교, 독도법 안내



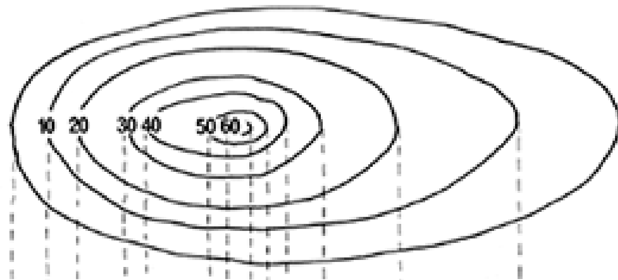
학습 활동 [부등식의 영역 이해하기]

■■ 부등식의 영역 만들어 보기

1) 감자를 이용하여 등고선을 만들어 보세요.

1. 자를 이용하여 감자에 일정한 간격으로 선을 긋는다	2. 그어진 선대로 감자를 자른다.
3. 이쑤시개를 이용하여 중심선을 맞춘다.	4. 가장자리를 연필로 그린다.
5. 높이에 따라 각각 초록, 노랑, 갈색, 고동색 등의 색깔로 칠한다	

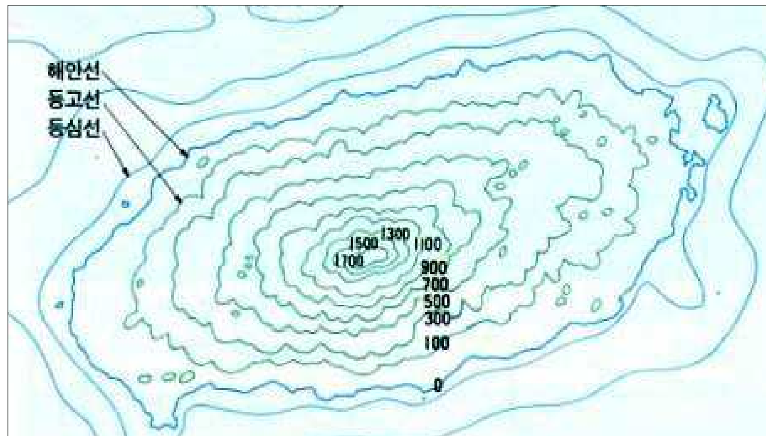
2) 이번에는 아래의 간단한 등고선 지도를 가지고 산을 정면에서 바라본 모양을 높이에 따라 그려 보세요.



3) 그려진 산의 그림을 모둠별로 비교하여 보세요.

4) 다음의 등고선 지도에서 선의 의미는 무엇이며 어떤 성질이 있는지 알아보고 토론해 봅시다.

등고선 지도

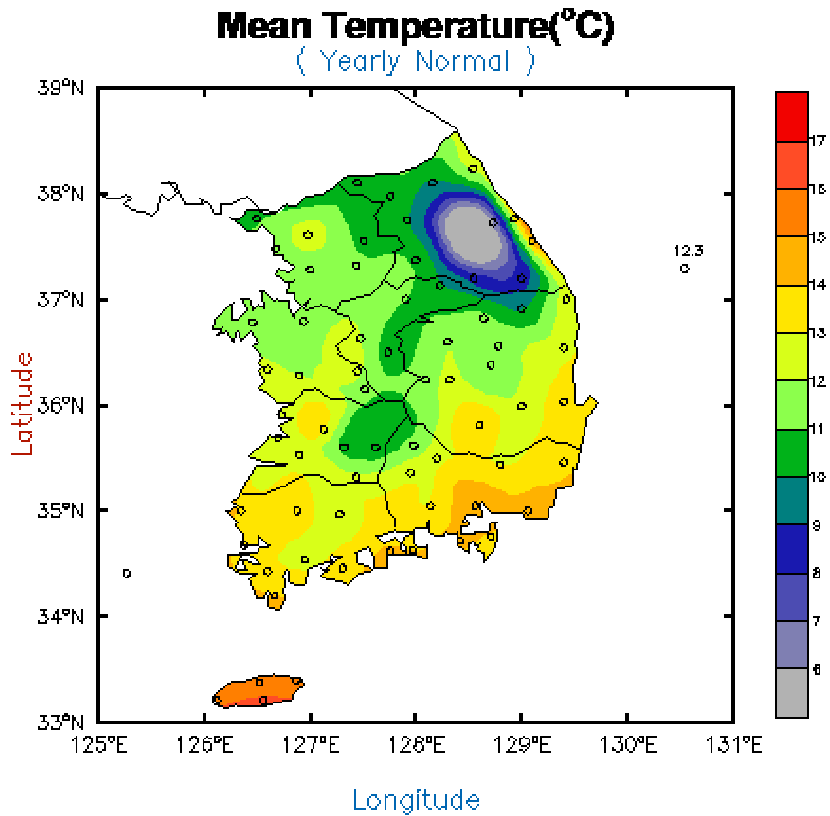




학습 활동

■■ 생활 속에서 부등식의 영역의 또 다른 예를 조사하여 봅시다.

기상청의 인터넷 홈페이지를 방문하여 연 평균기온도, 강수량도 등을 검색하여 보고 다음 물음에 답하여 봅시다.

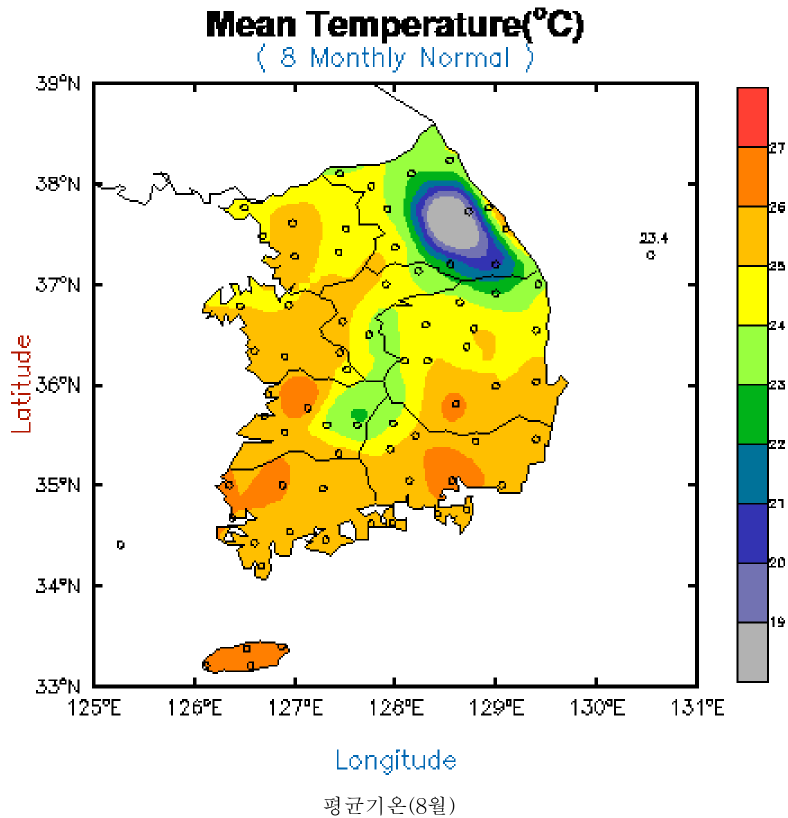


연평균기온

1) 위 기상도는 연평균기온을 나타낸 것입니다. 각 색깔이 의미하는 것은 무엇인가요?

2) 자기가 살고 있는 고장의 연평균기온을 알아봅시다.

3) 평균기온이 가장 높은 지역과 가장 낮은 지역의 기온은 몇 ℃이며, 차이는 얼마인가요?

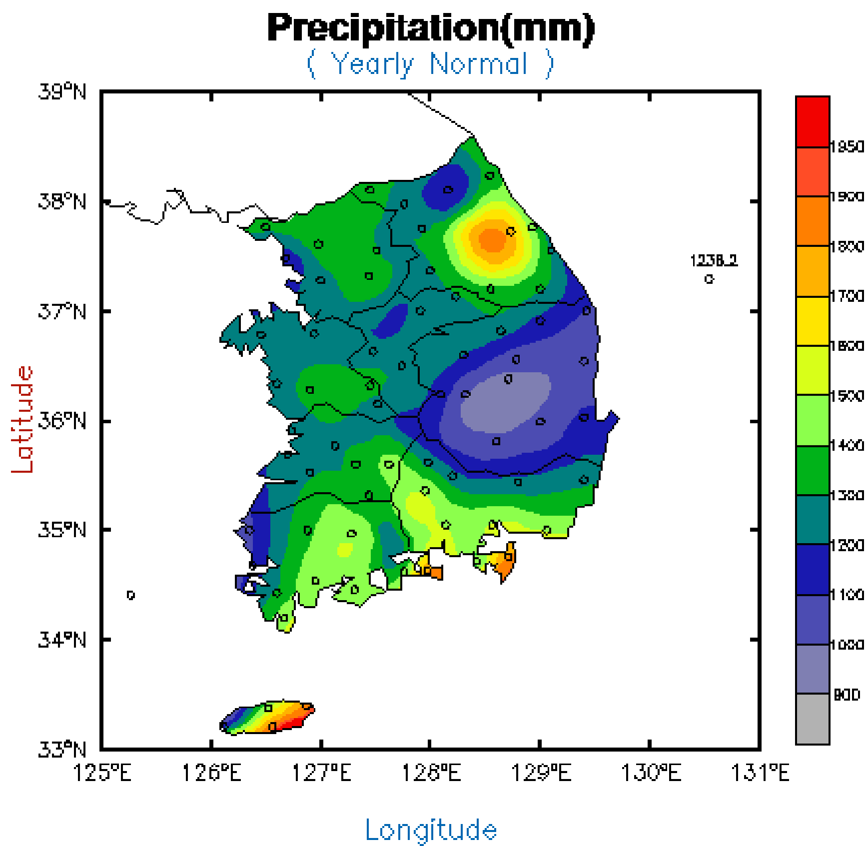


평균기온(8월)

1) 위 기상도는 8월 평균기온을 나타낸 것입니다. 각 색깔이 의미하는 것은 무엇인가요?

2) 자기가 살고 있는 고장의 8월의 평균기온을 알아봅시다.

3) 8월의 평균기온이 가장 높은 지역과 가장 낮은 지역의 기온은 몇 ℃이며, 차이는 얼마인가요?



연평균 강수량

1) 위 기상도는 연 평균 강수량을 나타낸 것입니다. 각 색깔이 의미하는 것은 무엇인가요?

2) 자기가 살고 있는 고장의 연평균 강수량을 알아봅시다.

3) 연평균 강수량이 가장 높은 지역과 가장 낮은 지역의 강수량은 몇 ㎜이며, 차이는 얼마인가요?

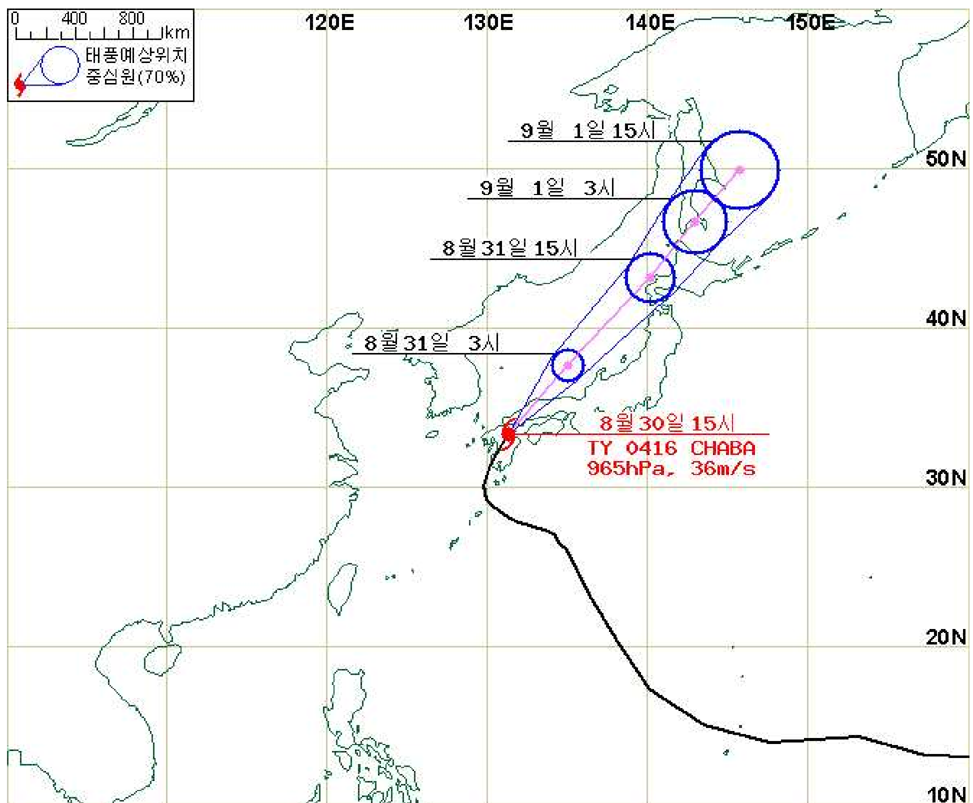


학습 활동

■■ 태풍의 피해 지역은?

기상청의 인터넷 홈페이지를 방문하여 우리나라에 큰 피해를 주었던 태풍의 진로를 조사하여 부등식의 영역으로 표시하여 봅시다.

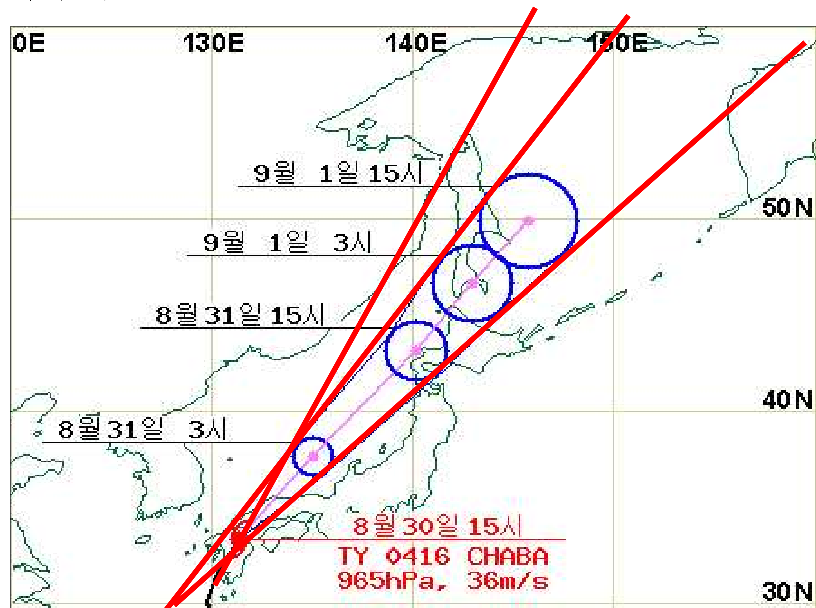
<원 기상도>



http://sky.kma.go.kr/fcst/typ_rpt/typ_200408301630_16_019.png 기상청

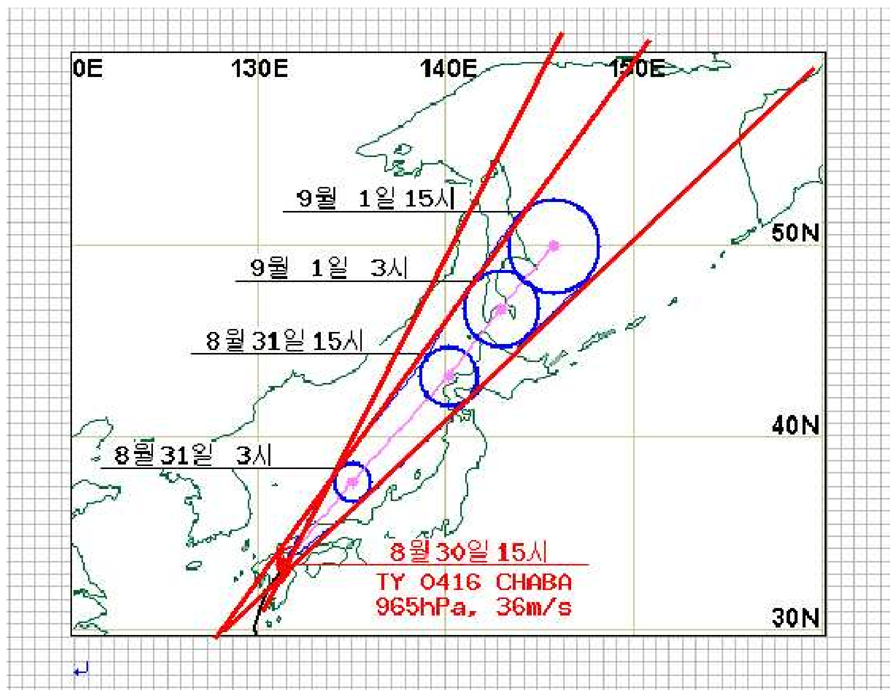
위 그림은 2004년 8월 30일부터 태풍 '차바'의 경로를 표시한 기상도이다. 이 지도를 부분 확대하여 다음 지도를 만들었다. 활동지(모눈용지)에 좌표로 표시하여 보세요.

<부분 확대 기상도>



http://sky.kma.go.kr/fcst/typ_rpt/typ_200408301630_16_019.png 기상청

1) 활동지에 좌표를 표시하고 경계선에 해당하는 직선의 방정식을 구해 보시오.



2) 주어진 사각형 안에서 태풍 피해지역을 연립부등식으로 나타내 보시오.

3) 태풍에 대처하기 위하여 기상청에서 수집하는 여러가지 정보에 대하여 조사하여 보시오.

4) 태풍의 이름에 얽힌 배경을 조사하여 발표해 봅시다.

5) 내가 태풍의 이름을 짓는다면 무엇이라고 할 것이며, 그렇게 이름을 지은 이유는 무엇입니까?



학습 활동

■■ **부등식을 이용한 비용 절약**



http://www.freeway.co.kr/html/lifefreeway/map/images/sub02_03/sub02_03_img01.jpg

경부고속도로를 이용하여 서울, 대전, 부산의 각 대리점에 물건을 공급하는 공장을 지으려고 한다. 서울에서 대전까지의 거리는 167km, 서울에서 부산까지의 거리는 445km이다. 운송비용을 최소로 하려면 어느 곳에 공장을 짓는 것이 바람직하겠는가? (단, 고속도로가 정체되는 일은 없다고 한다).

운송거리가 최소가 되려면 이동하는 거리가 최소가 되어야 한다. 고속도로를 따라서 이동하므로 고속도로를 직선으로 생각하여도 이동거리에는 변화가 없다.

1) 서울을 원점으로 하고 대전, 부산, 공장의 위치를 각각 수직선 위의 점으로 생각하고 각 점을 좌표로 표시하여 보시오.

2) 수직선 위에 서울을 원점 O, 점 A를 대전, 점 B를 부산으로 놓고 공장이 위치한 점을 X, 점 X의 좌표를 x라 놓고 이동거리를 식으로 나타내시오.

3) 구간별로 나누어 함수를 구하여 봅시다.

4) 구한 함수를 그래프로 나타내어 보시오.

5) 운송비용이 최소가 될 때의 x는 얼마인가?

활동 3

최적화하기

우리의 일상생활 속에서 경제적 측면 또는 건강관리 측면 등에서 최적화(optimization) 문제 상황에 직면하면서 그 해답을 찾기 위한 많은 연구가 이루어져 왔다. 예를 들어 '한 가정에서 한 달 동안 쓸 수 있는 생활비 범위 내에서 가족들의 건강을 위해 어떻게 식단을 구성해야 하는가?' 또는 '어떤 공장에서 최소의 비용으로 최대의 생산과 판매이익을 얻기 위해서는 각 제품에 투입될 노동력 및 자재 비용은 어떻게 분산 투자해야 하는가?' 등이다.

이와 같은 최적화 문제에 대한 해답을 얻기 위해 주어진 상황을 모형화하고 이를 부등식의 영역으로 표현하여 해결할 수 있다.

특히 해당 조건들이 일차식으로 주어질 때 이들 식이 나타내는 직선들에 의해 정해지는 부등식의 영역에 대한 이해를 충실히 하고 이를 바탕으로 실생활의 의사 결정 상황에서 수학적 방법이 어떻게 적용되는가를 알아본다.

또한 부등식의 영역에서 어떤 상황에서 가능한 여러 가지 조건 중에서 가장 알맞은 해답을 찾아내는 이론 중에 선형계획법(linear programming, LP)이 있다. 선형계획법은 수송문제로부터 발전했는데, 2차 세계 대전 중에 전략용 물자나 자재의 수송을 합리화할 필요성에 의해 연구되기 시작하여 발전된 가장 많이 사용하는 문제 해결 방법이다.

이 단계에서는 두 개의 문자 x, y의 일차식으로 구성된 연립부등식의 영역을 좌표평면에 나타내 보고, 선형계획법을 이용하여 이 영역에서 어떤 식의 최대값 또는 최소값을 구해보며, 심화활동으로 3변수 이상의 조건식이 주어지는 경우도 다루어 본다.

<table>
<tr><td>학습 목표</td><td colspan="2">· 최적화이론과 선형계획법을 설명할 수 있다.
· 실생활의 여러 문제 상황에서 선형계획법을 적용하여 최대값의 문제를 해결할 수 있다.
· 실생활의 여러 문제 상황에서 선형계획법을 적용하여 최소값의 문제를 해결할 수 있다.</td></tr>
<tr><td rowspan="2">준비물</td><td>교사용</td><td></td></tr>
<tr><td>학생용</td><td>필기도구, 활동지</td></tr>
</table>



교수-학습활동

학습 단계	교수-학습 활동	예상 시간	유의점
도입	· 전체 주제에 대한 소개 및 동기를 유발시킨다. · 활동안내와 학습목표를 이해시킨다. · 학습 준비물을 확인한다.	5분	· 프로젝트 전체 과정에 대해서 설명하고, 이를 이해하도록 한다.
본 활동	· 의사결정 및 최적화하기 · 부등식의 영역의 이론적·역사적 배경 · 최적화 이론, 선형계획 · 실생활 속에서 부등식의 영역 문제 해결하기 -활동지 [놀이 기구 문제] -활동지[식품에 포함된 열량] -활동지[튀김닭과 옥수수의 열량 섭취 문제] -활동지[이익이 최대가 되도록 결정하자] · 선형계획법의 기본가정 및 한계 알아보기 · 심화활동: 3변수 이상의 조건 문제 -활동지[식단문제] -활동지[배합문제] · 논의된 방법을 발표하고, 어떠한 방법이 효과적일지 전체 토론한다. · 교사는 학생들의 의견을 수렴하여 정리하는 형식으로 설명하여 준다.	120분	· 모든 학생들이 참여하도록 독려한다. · 학생들의 활동이 문제의 본질에서 벗어나지 않도록 유의한다. · 학습목표 외적인 질문에서 학생의 의견을 수렴하도록 노력하면서 수업의 방향으로 유도한다. · 개인별, 모둠별로 조사하고자 하는 방법의 다양성을 인정한다. · 논리적 추론 근거의 중요성을 강조한다. · 3변수 이상의 조건이 주어지는 문제는 결과보다는 사고과정에 주안점을 둔다.
정리	· 최적의 선택을 위해 부등식이 어떤 역할을 하는지 토의해 본다.	10분	· 학생들이 다양한 의견을 제시하고 적극적인 참여할 수 있도록 유도한다.



주요 초점질문

1. 생활 속에서 대하는 문제에서 최대 최소값은 어떻게 구할 수 있을까?
2. 부등식의 영역을 그래프로 나태내고 최대값, 최소값을 구할 수 있는가?
3. 선형계획법을 이해하고 적용할 수 있는가?



지도 활동

■■ 의사결정과 최적화하기

1. 부등식의 영역의 이론적 · 역사적 배경

일상생활에서 여러 가지 가능성이 있을 때, 그 중에서 가장 적당한 것을 찾아내는 방법, 곧 의사 결정 변수(decision value)들 가운데서 가장 적절한 값을 찾아내는 것이 최적화 이론(optimization)이다. 수학분야에서는 최적화의 문제를 일정 조건을 만족하는 영역에서 최대값과 최소값을 구하는 문제에서 주로 다루게 된다. 최적화의 문제는 예로부터 오늘날에 이르기까지 물건의 생산, 인력의 효율적인 배치 등 여러 가지 경제활동에 필요한 연구 분야이다.

2. 최적화 이론

최적화(optimization) 이론과 그 해법은 일찍이 수학의 한 분야로서 유럽과 미국에서 여러 분야의 학자들에 의해 많이 연구되어 왔으며 제2차 세계대전 이후에는 산업, 군사, 행정 등의 여러 조직에 적극적으로 활용되기 시작하여 생활에 많은 변화를 가져왔다.

사실 일상생활에서 무의식적으로 최적화의 개념을 인식하고 있으며 그 해법 또한 나름대로 가지고 있다. 예를 들어 어떠한 물건을 구입하려 할 때 우리는 몇 가지 대안 중에서 구입이유, 사용기간, 애프터서비스 사용대상, 구입가격 등의 여러 조건을 비교 검토한 후 결정을 내리게 된다. 물론 수학적인 기호나 컴퓨터를 통한 계산은 하지 않고 정형적인 모델은 수립하지 않더라도 그 방법론에 있어서는 최적화 기법이 그대로 적용되고 있다고 할 수 있다.

더욱이 생활주변에서 '최대의 효과', '최소의 비용', '최적의 선택' 등의 단어를 자주 접하고 있다. 그러나 최적화 기법을 체계적인 접근방법으로 이용하여 의사 결정을 하기는 그리 쉬운 일이 아니며 또한 그 결정의 질을 평가하기도 무척 어려운 일이다.

현재 선진국에서 최적화 기법을 가장 폭넓게 사용하고 있는 분야는 생산 및 재고관리, 공장 내 기계 및 설비 배치, 생산 공정 관리, 도시 건설, 도로 건설, 교통 통제 시스템 수립, 철도 · 항공 · 해운 등의 운항 노선 결정, 운항 계획 수립, 승무원 관리 계획, 송전 배선 네트워크 수립, 상하수도 파이프 네트워크 수립, 프로젝트 관리, 인력 수급 계획, 컴퓨터 전화 또는 인공위성 등의 통신망 구성, 전

자 회로 디자인, 화학 물질 배합, 정유 공정, 물류 센터 위치 선정, 물류 수송 계획 등과 같이 다양하게 있으나 우리나라에서 실질적으로 모델 정립 및 해법을 통한 솔루션 이용은 그렇게 많지 않은 편이다.

그러나 제품의 질을 향상시키고 원가를 절감하여 산업의 경쟁력을 키우며 공공서비스의 향상을 통해 삶의 질을 높여야 하는 것이 우리가 당면한 시급한 과제 중 하나이므로 최적화 기법의 올바른 이해, 폭넓은 연구와 적용이 절실히 필요하다고 할 수 있다.

또한 일본 등 선진 외국에서는 이러한 기법을 이용하여 모든 경작지에 지하수로 건설을 시도하려고 한다. 이러한 문제에서는 일정한 수압을 유지시키기 위한 펌프의 위치와, 용량결정과 지역마다 다른 수요에 대응하는 파이프의 지름을 결정하여 적절한 양의 물을 항상 공급함으로써 농작물 생산에 일대 혁신을 꾀하려 하고 있다. 이들과 유사한 형태의 문제 중에서 현재 우리나라에서 가장 관심의 대상이 되고 있는 부문은 인공위성, 전화, 컴퓨터 등의 통신 네트워크라고 할 수 있다.

3. 선형계획법

1939년 러시아 수학자인 칸토르비치(Kantoro-vich)는 그의 논문 □□조직과 생산 계획에서의 수학적 방법□□에서 여러 가지 생산 계획의 문제는 같은 유형의 수학적인 문제로 형식화하여 해결할 수 있음을 시사하였다.

1941년 히치콕(Hitchcock)은 대표적인 선형계획 문제의 하나인 수송 문제를 수식화하여 해법을 제공하였고, 1945년 스티글러(Stigler)는 최소의 비용으로 영양을 섭취하는 다이어트 문제(Diet problem)의 해법을 다루었다.



Dantzig

제2차 세계대전 중 영국에서는 과학자들로 하여금 부족한 전시물자 문제를 연구하도록 하였으며, 미국 공군에서는 군수물자 배급 문제를 해결하기 위한 연구팀을 구성하였다. 이 연구팀의 일원인 단지그(Dantzig)는 1947년 선형계획 문제의 해법인 단체법(The Simplex Method of Optimization)으로 수학계에 큰 공헌을 하게 되었으며 미 공군에서 계산기에 의존하던 수 많은 문제를 해결해 주었다. 그의 이론이 발전하여 선형계획법이라는 학문으로 정착을 하였으며 경제뿐만 아니라 실생활에도 많은 발전을 초래하였다.

선형계획 문제는 단체법으로 그 수학적 해법은 마련되었지만 미지수가 그리

많지 않은 경우에도 손으로 계산하기에는 그 계산량이 엄청나기 때문에 컴퓨터의 도움이 없이 실제 문제를 해결하기는 어려웠다.

다행히 거의 같은 시기에 컴퓨터가 출현하였고 이에 따라 복잡한 계산이 가능해지면서 단체법은 경영경제 분야에서 크게 주목을 받기 시작하였다.

1951년 이후 선형계획 문제는 이론적인 연구와 실제적인 응용이 본격화 되었다. 게일(Gale) 등은 최소 문제를 최대 문제로, 최대 문제를 최소 문제로 바꾸어서 그 해법을 구하는 쌍대 문제에 관한 이론을 연구하였고, 쿠퍼(Cuper)는 선형계획 문제를 산업공학에 응용하여 산업공학 분야 발전에 큰 기여를 하였다.

4. 선형계획법의 이론적 구조

가. 선형계획의 최대 문제

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leqq d_i \ (i=1,2,\cdots,m) \\ x_k \geqq 0 \ (k=1,2,\cdots,n) \end{cases} \cdots ①$$

과 같은 $(m+n)$개의 제약 조건 아래에서

$$\sum_{i=1}^{n} c_i x_i \qquad \cdots ②$$

의 값을 최대로 하는 $x_k(k=1,2,\cdots,n)$를 구하는 문제를 선형계획법의 최대화 문제라고 한다.

위의 일차형식 ②를 목적함수라 하고, 제약조건 ①을 만족하는 해 x_k $(k=1,2,\cdots,n)$를 가능해(feasible solution)라고 한다. 가능해 중에서 ②의 값을 최대로 하는 것을 이 문제의 최적해(optimal solution)라고 한다.

나. 선형계획의 최소문제

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \geqq d_i \ (i=1,2,\cdots,m) \\ x_k \geqq 0 \ (k=1,2,\cdots,n) \end{cases} \cdots ③$$

과 같은 $(m+n)$개의 제약 조건 아래에서

$$\sum_{i=1}^{n} c_i x_i \qquad \cdots ④$$

의 값을 최소로 하는 $x_k(k=1,2,\cdots,n)$를 구하는 문제를 선형계획법의 최소화 문제라고 한다.

위의 식 ④를 목적함수라 하고, 제약조건 ③을 만족하는 $x_k(k=1,2,\cdots,n)$를 가능해라고 한다. 가능해 중에서 ④의 값을 최소로 하는 것을 이 문제의 최적해라고 한다.

최소문제 ③, ④의 부호를 바꾸면, 실질적으로 변하지 않지만 형식적으로는 최대화 문제로 된다.

지도초점
최대화, 최소화의 정의를 설명한 후 학생들이 직접 최소화 문제를 최대화 문제로 유도하게 한다.

1) 최소화 문제는 최대화 문제로 귀착될 수 있다. 최소화 문제의 식 ③, ④를 이용하여 최대화 문제로 바뀌는 과정을 설명하여 보자.

예상되는 답)

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{n}(-a_{ij}\,x_j) \leqq -d_i \;\; (i=1,2,\cdots,m) \\ x_k \geqq 0 \;\; (k=1,2,\cdots,n) \end{cases}$$

과 같은 제약 조건 아래에서

$$\sum_{i=1}^{n}(-c_i)\,x_i$$

의 값을 최대로 하는 $x_k(k=1,2,\cdots,n)$를 구하는 문제로 된다. 따라서, 최소화 문제는 최대화 문제로 귀착될 수 있다.

■■ 선형계획법의 적용 1

놀이 기구 문제

지명이는 친구들과 함께 놀이기구를 타러 놀이동산에 갔다. 놀이 기구 P, Q 를 한 번 타는 데 요금은 각각 800원, 1200원이고 시간은 각각 10분, 5분씩 소요된다. 지명이가 놀이동산에서 놀 수 있는 시간은 40분 정도이고 쓸 수 있는 돈은 4,800원이다. 이 조건에서 지명이는 놀이기구 P, Q를 최대한 많이 타기를 원한다. (단, 놀이기구를 타기 위해 기다리는 시간은 없는 것으로 가정하자.)

1) 놀이 기구 P, Q를 한 번 탈 때, 요금과 시간 사이의 관계를 표로 나타내어 보시오.

구분 \ 놀이기구	P	Q
요금(원)		
시간(분)		

지도초점
복잡한 조건을 간단한 표로 정리할 수 있도록 한다.

예상되는 답)

구분 \ 놀이기구	P	Q
요금(원)	800	1200
시간(분)	10	5

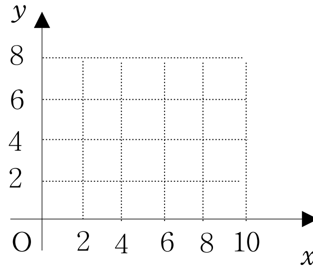
2) 지명이가 놀이기구 P, Q를 타는 횟수를 각각 x, y 라고 할 때, x, y 사이의 연립부등식을 구하시오.

지도초점
1. 복잡한 조건을 연립부등식으로 나타낼 수 있도록 한다.
2. 방정식으로 세우지 않도록 하며, 부등식을 세워서 조건에 맞는 것을 구할 수 있도록 한다.

예상되는 답)

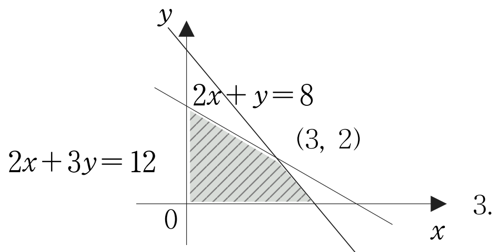
$$\begin{cases} 2x+3y \leqq 12 \\ 2x+y \leqq 8 \\ x>0,\ y>0 \end{cases}$$

3) 이 연립부등식을 좌표평면에 그려 보시오.



지도초점
연립부등식을 좌표평면에 영역으로 나타낼 수 있도록 한다.

예상되는 답)



4) 놀이 기구 P, Q의 이용 가능한 횟수에 해당하는 좌표 $(x,\ y)$를 찾아보고, 그 때 소요되는 비용과 시간을 구해 보시오.

이용 횟수 / 구분	(,)	(,)	(,)	(,)	(,)	(,)	(,)
비용							
시간							

예상되는 답)

이용 횟수 / 구분	(1, 1)	(1, 2)	(1, 3)	(2, 1)	(2, 2)	(3, 1)	(3, 2)
비용	2,000	3,200	4,400	2,800	4,000	3,600	4,800
시간	15	20	25	25	30	35	40

5) 지명이는 놀이 기구 P, Q를 각각 몇 번씩 타야 최대한 많이 탈 수 있는가?

지도초점
조건에 맞는 함수의 최대값을 구하도록 한다.

예상되는 답)
P : 3회, Q : 2회

■■ 선형계획법의 적용 2

식품에 포함된 열량

다음은 우리가 흔히 접하는 식품에 포함된 열량을 1인분 기준으로 조사[3])한 것이다.

(단위 : cal)

식사		반찬		후식	
식품	열량	식품	열량	식품	열량
쌀밥	325	근대된장국	50	사과(1개)	175
라면	525	김치찌개	125	아이스크림	200
김밥	475	불고기	150	우유	125
자장면	500	배추김치	25	콜라	100

1) 어떤 사람이 위의 표에 있는 음식 중에서 식사, 반찬, 후식을 하나씩만 택할 때, 섭취할 수 있는 열량의 최대값과 최소값을 갖는 음식의 조합과 그 값을 구하자.

풀이)

최대값은 식사, 반찬, 후식 중에서 열량이 가장 많은 것으로 택하고, 최소값은 열량이 가장 적은 것으로 택한다.

(1) 라면, 불고기, 아이스크림을 택하면 총열량은

$$525 + 150 + 200 = 875 \ (\text{cal})$$

로 최대값이다.

3) 출처: 승정자 외 4인(1998), 칼로리 핸드북, 이벤트 박스

(2) 쌀밥, 배추김치, 콜라를 택하면 총열량은

$325 + 25 + 100 = 450$ (cal) 로 최소값이다.

2) 스케이팅을 할 때 몸무게 5kg당 1분에 1cal가 소모된다고 한다. 몸무게 50kg인 사람이 1시간 동안 스케이팅을 한 후에 소모된 열량을 채우기 위하여 식사, 반찬, 후식을 하나씩 택하였다. 가장 근접하는 경우를 생각하고, 이 때, 남은 열량 또는 모자라는 열량을 계산하여 보자.

풀이)

소모된 열량은

$$\frac{50}{5} \times 60 \times 1 = 600 \text{ (cal)}$$

이므로 김밥, 배추김치, 콜라를 택하여 먹으면 총열량

$475 + 25 + 100 = 600$ (cal)를 채울 수 있다.

지도초점

1. 주어진 표와 조건을 만족하도록 식단을 짜야 함을 강조한다. 즉, 부등식의 영역 내에서 구하려는 최대값, 최소값의 중요성을 인식하게 한다.
2. 다른 경우를 택하여 남거나 모자라는 열량을 각자 계산하여 보게 한다.

3) 성인 여자는 평균 2000 cal, 남자는 2500 cal를 하루에 소모한다. 각자의 식단을 작성하여 보자.

풀이)

여자 식단(2000 cal) 예시

	식단	총열량
아침	쌀밥, 김치찌개, 우유	575 cal
점심	김밥, 근대된장국, 사과(1개)	700 cal
저녁	자장면, 배추김치, 아이스크림	725 cal

남자 식단($2500\ cal$) 예시

	식단	총열량
아침	쌀밥, 김치찌개, 사과(1개), 우유	750 cal
점심	자장면, 근대된장국, 배추김치, 아이스크림	775 cal
저녁	쌀밥, 라면, 배추김치, 콜라	975 cal

■■ 선형계획법의 적용 3

튀김닭과 옥수수의 열량 섭취 문제

어느 음식점에서 판매하는 1조각의 가격은 900원이고, 옥수수 1개의 가격은 750원이다. 또, 튀김닭 1조각에는 비타민 A가 100단위, 칼륨이 0㎎, 철분이 1.2㎎ 들어 있으며, 열량은 120cal이다. 옥수수 1개에는 비타민 A가 300단위, 칼륨이 150㎎, 철분이 1.0㎎ 들어 있으며, 열량은 60cal이다.

비타민 A를 1000단위 이상, 칼륨은 150㎎ 이상, 철분은 6㎎ 이상, 열량은 600 cal 이상 섭취하면서 구입 가격을 최소로 하려면 튀김닭 몇 조각과 옥수수 몇 개를 사야 할까요?

1) 위의 문제를 표로 정리하여 보시오.

종류	비타민 A	칼륨(㎎)	철분(㎎)	열량(cal)	1개당 가격
튀김닭					
옥수수					
섭취한계					

예상되는 답)

종류	비타민 A	칼륨(㎎)	철분(㎎)	열량(cal)	1개당 가격
튀김닭	100	0	1.2	120	900원
옥수수	300	150	1.0	60	750원
섭취한계	1000 이상	150 이상	6 이상	600 이상	

2) 문제의 뜻에 맞는 식을 세워 보시오.

예상되는 답)

튀김닭을 x조각 사고 옥수수를 y개 산다고 할 때, 연립부등식

$$\begin{cases} \text{비타민 } A: 100x+300y \geqq 1000 \\ \text{칼륨}: 0 \cdot x+150y \geqq 150 \\ \text{철분}: 1.2x+y \geqq 6 \\ \text{열량}: 120x+60y \geqq 600 \\ x \geqq 0,\ y \geqq 0 \end{cases}$$

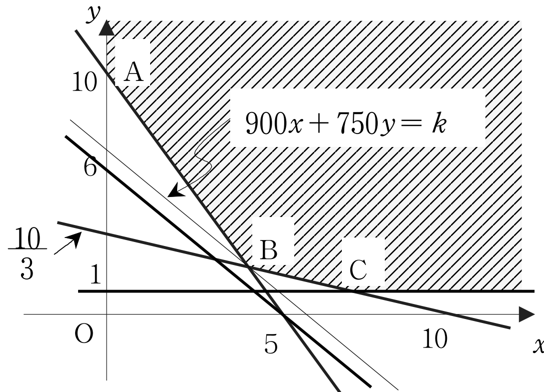
의 영역에서 구입 가격

$$900x+750y$$

가 최소값을 가잘 때의 x, y를 구하면 된다.

3) 주어진 연립부등식의 영역을 그래프로 나타내시오.

예상되는 답)



4) 이 영역에 있는 꼭지점의 좌표를 구하고, 이들 점에서

$$900x+750y=k$$

의 값을 구하여 다음 표를 완성하시오.

꼭지점	(0, 10)	(4, 2)	(7, 1)
k			

예상되는 답)

꼭지점	(0, 10)	(4, 2)	(7, 1)
k	7500	5100	7050

5) 답을 구해 보시오.

예상되는 답)

$x=4$, $y=2$일 때, 최소값은 $k=5100$ 이다.

주어진 부등식의 영역에서 직선

$$900x+750y=k\text{, 즉 } y=-\frac{6}{7}x+\frac{k}{750}$$

의 y절편이 최소값을 갖는 것은 이 직선이 점 B(4, 2)를 지날 때이다.

따라서, 구입 가격을 최소로 하기 위해서는 튀김닭을 4조각, 옥수수를 2개 사면 되고 이 때의 구입 가격은 5100원이다.

■■ 선형계획법의 적용 4

이익이 최대가 되도록 결정하자.

식탁용 나이프와 포크를 생산하는 S실업은 현재의 생산설비를 가지고 이익을 최대로 할 수 있도록 각 제품의 생산량을 결정하려 하고 있다. 이 제품들은 품질이 우수하여 생산된 제품전량이 수출되고 있는데 각각 케이스당 8,000원과 6,000원의 이익이 발생한다. 이 제품들은 프레스공정과 광택공정을 거치게 되는데 다음 일주일간 각 공정에서 사용가능한 인력은 프레스공정의 경우 700시간이며, 광택공정의 경우, 1,000시간으로 추정된다. 한편, 나이프 한 케이스 생산에는 12분(0.2시간)의 프레스공정 인력과 30분(0.5시간)의 광택공정 인력이 소요되며, 포크 한 케이스 생산에는 24분(0.4시간)의 프레스공정 인력과 15분(0.25시간)의 광택공정 인력이 소요된다. S실업은 다음 일주일간의 나이프와 포크의 생산량을 총이익이 최대가 되도록 결정하고자 한다.

일반적으로 의사결정의 문제에는 두 가지의 요소가 있다. 가능한 대안의 분석과 각 대안에 대한 선호도의 분석이다. 먼저 선호도를 보면 이 문제는 이익 증대가 목적이므로 이익 발생이 많이 되는 대안이 더 바람직할 것이다. 따라서 이 문제에 있어서 선호도는 총이익으로 표현될 수 있다.

1) 먼저 이 문제를 해결하기 위해 수식화하는 작업이 필요하다. 변수를 설정하여 보시오.

S실업은 나이프와 포크 생산으로 케이스당 각각 8,000원과 6,000원의 이익을 얻게 되므로

x=일주일간의 나이프 생산량 (단위: 케이스)

y=일주일간의 포크 생산량 (단위: 케이스)

z=일주일간의 총이익 (단위: 원)

이라 하자.

2) 구하고자 하는 것이 무엇인지 설명하고 수식으로 나타내어 보자.

구하려는 것은 총이익이며, 수식으로 나타내면

$z = 8,000x + 6,000y$ … ①

로 표현된다.

이익을 최대화하기 위해서는 z를 최대화하는 대안을 구해야 할 것이다.

3) 이제 의사결정의 또 다른 요소인 가능한 대안을 생각해 보자. 이 문제의 경우 하나의 대안은 (x, y)의 값으로 표현된다.

예를 들어, $(x, y) = (1,000, 2,000)$은 "나이프 1,000케이스, 포크 2,000케이스 생산"이라는 하나의 대안을 나타낸다. 이 대안이 실제로 실행에 옮겨질 수 있기 위해서는 이 대안에서 필요로 하는 각 공정에서의 조업시간은 문제에서 주어진 조업가능시간을 초과해서는 안 된다.

따라서 하나의 대안 (x, y)가 실행가능한 대안이 되기 위해서는 다음과 같은 조건들을 만족하여야 한다.

먼저, 프레스공정의 경우 나이프 x케이스를 생산하기 위해서는 0.2x시간의 조업이 소요되고 포크 y케이스를 생산하기 위해서는 0.4y시간의 조업이 소요되므로 총 조업소요시간은

$0.2x + 0.4y$

가 된다. 반면 프레스공정의 조업가능시간은 계획기간 중 700시간뿐이므로 대안 (x, y)는 다음의 조건을 만족해야 한다.

$0.2x + 0.4y \leqq 700$ … ② (프레스공정 제약식)

마찬가지로, 광택공정의 경우 총조업소요시간은 $0.5x + 0.25y$이며 조업가능시간은 1,000시간뿐이므로 대안 (x, y)는

$0.5x + 0.25y \leqq 1,000$ … ③ (광택공정 제약식)

을 만족시켜야 한다.

식 ②와 ③ 이외에도 나이프와 포크의 생산량은 음수가 될 수 없으므로 대안 (x, y)는

$x \geq 0, \quad y \geq 0$ … ④

를 만족해야 한다. ④의 제약식을 비음조건(非陰條件, nonnegativity constraint)이라고 부른다.

이제 식 ①~④를 정리하여 보자.

$z = 8,000x + 6,000y$ 의 최대값 …①

$0.2x + 0.4y \leq 700$ …②

$0.5x + 0.25y \leq 1,000$ …③

$x \geq 0, \quad y \geq 0$ …④

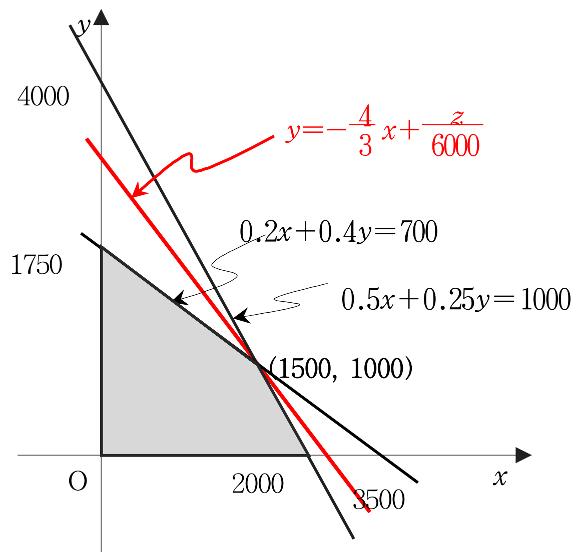
여기에서 결정하고자 하는 것은 변수 x, y의 값이다.

①식을 **목적함수**라고 부른다.

②~④식들에서 변수 x, y는 아무 값이나 가질 수 있는 것이 아니고 이 식들을 만족하는 값 중에서 선택되어야 함을 말해주고 있다. 특히 ④식은 비음제약식(음이 아니라는 제약식) 으로 명시적으로 적어 주어야만 완전한 모형이 된다.

4) 부등식의 영역을 그래프로 나타내어 보자

예상되는 답)



5) z의 최대값은 얼마인가?

예상되는 답)

최적해 : $(x,\ y) = (1500,\ 1000)$
z의 최대값(주당 최대 이익)은 1800만원이 된다.

■■ 선형계획법의 기본가정 및 한계

1. 선형계획법의 기본가정 ☞교사를 위한 자료

선형계획법은 경영목표를 선형의 함수로 나타내며, 제약조건들을 선형의 등식이나 부등식으로 나타내며, 이에 필요한 계수들은 모두 확실한 값이 알려져 있음을 가정한다. 즉, 선형계획법의 기본적인 두 가정은 계수들의 확실성과 선형의 조건이다.

계수들의 값이 확실히 알려져 있음을 가정하는 것은 모든 불확실성이 존재하는 확률적인 상황에서는 선형계획법을 이용할 수 없다는 것을 의미한다. 뿐만 아니라 계수들의 값에 불확실성이 없는 경우에도 자료의 미비로 그 계수의 값을 정확히 알지 못할 때가 많이 있다. 이런 경우에는 이 계수의 값을 여러 가지로 추정하면서 해의 결과가 어떻게 변화하는가를 보고 의사결정을 하여야 한다. 이것을 '민감도분석'이라고 한다.

목적함수 및 제약식이 선형이라는 가정은 문제의 성격이 다음에 설명하는 세 가지 조건들을 만족시켜야 한다는 것을 의미한다.

첫째는 비례(proportionality)의 조건이다. 이는 자원의 사용량이나 수익이 결정변수의 값에 비례한다는 것이다.

둘째는 가산성(additivity)의 조건이다. 이는 전체공정의 자원사용량은 각 공저의 사용량의 합과 같고, 수익은 각 제품의 수익의 합과 같다는 가정이다.

마지막으로 가분성(divisibility)의 조건이다. 이는 의사결정변수들의 값이 분수 또는 소수가 될 수 있다는 가정이다. 나이프나 포크를 반 개 생산한다는 것은 불가능하지만 수백 케이스를 생산하는 문제라면 반 개 정도의 오차는 큰 문제가 되지 않는다. 그러나 항공기나 선박 등의 생산과 같이 생산대수가 적은 경우에는 정수해를 구하는 것이 필요하며 이 때에는 선형계획으로는 취급하기가 어렵고 정수계획법(integer programming)으로 취급하여야 한다.

이와 같은 선형의 조건을 만족하지 않을 경우에는 비선형계획법이나 정수계획법 등 다른 방법을 이용하여야 되겠으나 선형계획법은 매우 효과적인 해법이 개발되어 있기 때문에 대규모의 문제를 풀 수 있는 반면 비선형계획법 또는 정수계획법 등은 그렇지 않다. 따라서 선형의 조건을 만족하지 않을 때에도 선형계획으로 근사한 해를 구하는 것이 때로는 바람직하다.

2. 최대화문제 ☞교사 및 학생을 위한 자료

그래프를 통하여 선형계획문제를 분석하는 방법은 단순히 제약조건을 그래프에 나타내어 제약조건을 만족하는 가능한 해의 범위를 구하고 이 범위 안에서 목적함수를 가장 좋게 하는 해를 찾아내는 방법이다.

다음의 문제를 생각하여 보자.

■ 일반앰프와 고성능앰프를 생산하는 소규모 전자회사인 F전자는 현재의 생산능력 안에서 이익이 최대가 되도록 각 제품의 생산량을 결정하려고 하고 있다. 앰프생산은 조립공정과 검사공정을 거치게 되는데, 각 공정에서 하루에 이용가능한 인력은 각각 240시간 및 81시간이고, 일반앰프를 생산하는 데에는 개당 1.2시간의 조립공정과 0.5시간의 검사공정 인력이 소요되며, 고성능앰프 생산의 경우 개당 4시간의 조립공정과 1시간의 검사공정 인력이 소요된다. 특히 고성능앰프의 경우 특수 반도체칩이 1개씩 소요되는데 최근 이 칩의 공급이 원활하지 못하여 하루에 40개씩만을 조달할 수 있다. 이 회사에서 생산된 앰프는 품질이 좋아서 전량 판매되고 있으며 일반앰프는 개당 20만원, 고성능앰프는 개당 50만원의 이익을 내고 있다.

이 문제는 이익이 최대가 되도록 일반앰프와 고성능앰프의 일일생산량을 구하는 문제이므로 변수 X_1과 X_2를 다음과 같이 정의한다.

X_1=일반앰프 일일생산량

X_2=고성능앰프 일일생산량

그러면 조립공정 처리능력 제약, 검사공정 처리능력 제약, 그리고 반도체칩 공급제약을 가지며 이익을 최대로 하는 선형계획모형은 다음과 같이 정식화된다.

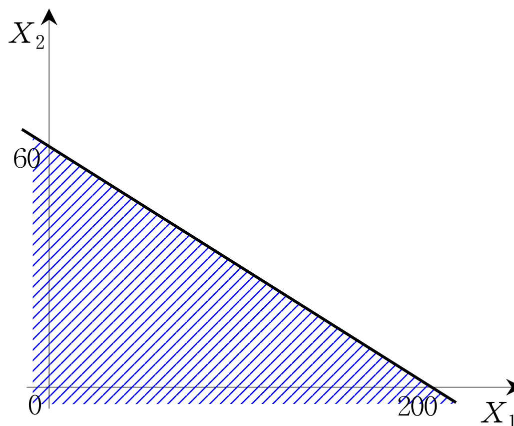
$Z=20X_1+50X_2$의 최소값	(총이익, 단위: 만원) … ①
$1.2X_1+4X_2 \leqq 240$	(조립공정 제약식, 단위: 시간) … ②
$0.5X_1+X_2 \leqq 81$	(검사공정 제약식, 단위: 시간) … ③
$X_2 \leqq 40$	(반도체칩 공급계약, 단위: 개수) … ④
$X_1,\ X_2 \geqq 0$	(비음제약식) … ⑤

(1) 제약식의 표현

이 선형계획모형은 두 개의 변수만을 갖고 있기 때문에 그래프로 나타낼 수 있다. 먼저 첫 번째 제약식

$$1.2X_1 + 4X_2 \leqq 240$$

은 부등식이므로 직선이 아닌 반평면을 나타낸다. 이 반평면을 나타내기 위해서는 먼저 이 부등식을 등식이라 생각하고 직선을 그린 후 이 직선으로 갈라진 두 개의 반평면 중 어느 쪽이 이 부등식을 만족하는가 판정하면 된다.



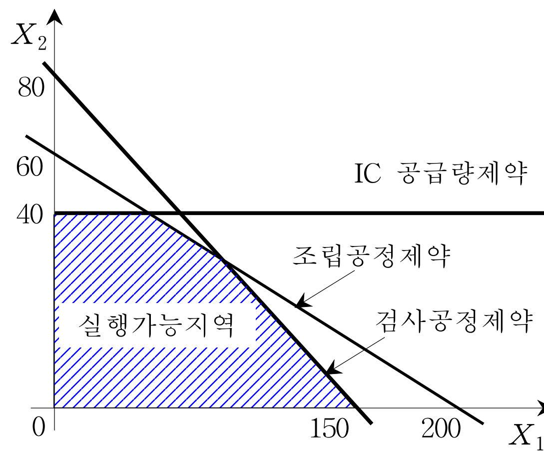
[조립공정제약조건]

그림 [조립공정제약조건]에서 직선의 좌측하단의 반평면은 이 부등식을 만족하며 우측상단의 반평면은 이 부등식을 만족하지 않는다. 즉, 좌측하단 반평면 위의 점만이 조립공정의 처리능력 제약을 만족한다. 직선 위에 있는 점들은 물론 이 부등식을 만족한다.

이제 제약식 ②~④와 비음조건 ⑤를 모두 만족하는 지역을 찾아보면 [그림. 실행가능지역]의 빗금친 부분이 된다. 이 부분 안에 들어가는 대안 (X_1, X_2)는 실행가능한 대안이 되며 이러한 점 (X_1, X_2)를 '실행가능해'라고 부른다.

일반앰프를 100개, 고성능앰프를 20개 생산한다면 이것은 아래 그림 [실행가능지역]의 빗금친 부분 안에 들어가서 실행가능해가 되지만 일반앰프를 100개, 고성능앰프를 50개 생산한다면 어떻게 될까?

조립공정에 소요되는 인력이 $1.2 \cdot 100 + 4 \cdot 50 = 320$ 시간이 되어 사용가능량 240을 초과하기 때문에 이것은 실행불가능해이다.



[실행가능지역]

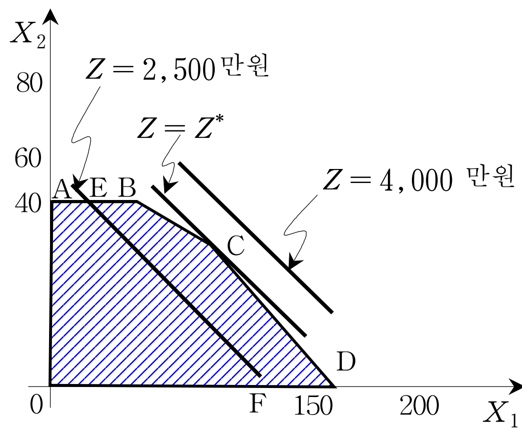
(2) **목적함수의 표현**

그러면 실행가능지역에 있는 점들 중에서 목적함수 Z의 값을 최대로 하는 점을 어떻게 발견할 것인가 알아보도록 하자. 목적함수는

$$Z = 20X_1 + 50X_2$$

인데 아직 Z의 값을 모르므로 이 함수는 하나의 직선으로 표현할 수는 없다. 따라서 여러 가지 Z의 값을 가정하여 그림을 그려보도록 하자.

예를 들어, $Z = 2,500$만원이라면 이 식은 그림 [목적함수와 최적해]에 있는 $Z = 2,500$만원에 해당하는 직선이 된다. 그리고 이 직선 위에 있는 점의 목적함수값은 모두 2,500만원이 된다. 이러한 의미에서 이 직선은 한 개의 가능한 예가 된다('등위이익선'이라 함). 이 직선 중에서 빗금친 부분인 실행가능지역 안에 들어가는 부분(선분 EF)위에 있는 한 점 (X_1, X_2)를 선택한다면 2,500만원의 이익을 얻을 수 있음을 알 수 있다.



[목적함수와 최적해]

만일 $Z = 4,000$ 만원이라면 어떤가?

그림에서 볼 때 이 직선은 $Z = 2,500$만원일 때의 직선과 평행이지만 실행가능지역과 만나지는 못하고 있다. 이것은 4,000만원의 이익을 얻는 것은 불가능함을 말하여 준다. 따라서 등위이익선이 실행가능지역과 최소한 한 점에서 만나면서 가능한 위쪽으로 옮겨간 경우가 실행가능하면서 이익이 최대로 발생하는 경우가 될 것이다. 이것은 그림에서 볼 때 이 직선이 꼭지점 C를 지날 때이다.

점 C는 조립공정 제약식(직선 BC)과 검사공정 제약식(직선 CD)이 교차하는 점이므로 연립방정식

$$1.2X_1 + 4X_2 = 240$$

$$0.5X_1 + X_2 = 81$$

을 풀어서 구할 수 있다. 이 두 식으로부터 점 C의 값은

$$X_1 = 105,\ \ X_2 = 28.5$$

가 되며, 이 때의 최대이익 Z^*는

$$Z^* = 20 \cdot 105 + 50 \cdot 28.5 = 3,525 \text{ (만원)}$$

이 된다.

따라서 최적의 일일생산계획은 일반앰프를 105대, 고성능앰프를 28.5대 생산하는 것이다. 여기서 고성능앰프의 생산량이 정수가 아니므로 이에 대하여 언급해 둘 필요가 있다.

이에 대한 해석방법은?

0.5대는 그 다음날의 생산 계획과 연결된다고 볼 수 있다. 즉 마지막 한대는 이 날 마지막에 생산을 시작하여 다음날 끝난다고 해석함으로써 정수가 아닌 최적해에 대한 해석을 할 수 있다.

(3) 제약식의 여유변수

다시 선형계획의 모형으로 돌아가서 제약식의 의미를 좀 더 살펴보자. 예를 들어 조립공정 제약식 ②는

$$1.2X_1 + 4X_2 \leqq 240$$

으로 주어져 있다. 이 식의 우변항 240시간은 조립공정의 처리능력을 나타내며 좌변항 $1.2X_1 + 4X_2$(시간)은 생산계획을 $(X_1,\ X_2)$로 하였을 때의 조립공정 시간을 나타낸다. 이 제약식은 조립공정 사용시간이 처리능력을 넘지 못한다는 제약조건을 나타내고 있다. 어떤 생산계획의 경우에는 처리능력을 100%사용할 수도 있으며 어떤 생산계획에서는 처리능력의 일부만 사용할 수도 있다. 처리능력의 일부만 사용하는 경우에는 사용하지 않고 남는 처리능력이 있을 것이며 남은 처리능력은

$$S_1 = 240 - (1.2X_1 + 4X_2) \ \cdots \ ⑥$$

로 나타낼 수 있다. 즉, S_1은 총처리능력 중 사용하고 남은 처리능력을 나타낸다. 이 값 S_1은 제약식 ②를 만족시키기 위해서는

$$S_1 \geqq 0 \qquad \cdots ⑦$$

이 되어야 한다. 이렇게 식 ⑥으로 주어진 변수 S_1을 제약식 ②의 '여유변수'라고 부른다. 식 ②를 만족시키기 위해서는 여유변수 S_1은 비음조건 ⑦을 만족시켜야 한다.

앞에서 구한 최적해에서의 각 제약식의 여유변수가 얼마인가 알아보면 먼저 조립공정 제약식 ②는

$$S_1 = 240 - (1.2 \cdot 105 + 4 \cdot 28.5) = 0$$

이 되어 여유변수의 값이 0이 된다(이러한 제약식을 속박적 제약식이라 함). 즉, 최적해에서 조립공정의 처리능력은 100% 활용되고 있음을 의미한다.

검사공정 제약식 ③의 여유변수를 S_2라고 하면

$$S_2 = 81 - (0.5 \cdot 105 + 28.5) = 0$$

이 되어 여유변수의 값이 0이 되는 반면 반도체칩 공급량 제약식 ④는

$$S_3 = 40 - 28.5 = 11.5$$

가 되어 여유변수의 값이 양수가 된다. 이렇게 여유변수의 값이 양수가 되는 식은 공급량이 모두 사용되지 않고 남았음을 의미한다.

결론적으로, 이 문제의 경우 최적으로 생산계획을 수립하면 첫 번째와 두 번째 자원인 조립공정 및 검사공정의 처리능력은 완전 100% 가동되는 반면 세 번째 자원인 반도체칩 공급량은 전량 사용되지는 못하고 있음을 알 수 있다.

따라서 만일 자원의 확보를 위하여 신규투자를 한다면 어느 분야에 해야 타당할까?

반도체칩 공급량의 추가확보보다는 생산공정의 처리능력 확충이 우선적으로 이루어져야 할 것이라고 판단할 수 있다.

3. 최소화문제

■ A중학교 구내식당의 영양사인 김선생님은 학생들이 적절한 건강을 유지하기 위해서는 매일 단백질 66g과 철분 9mg을 섭취하여야 한다는 것을 알고 있다. 이 영양분들은 고기와 야채를 통해 제공되는데 고기는 1kg에 300g의 단백질과 30mg의 철분을 함유하고 있으며, 야채는 1kg에 20g의 단백질과 10mg의 철분을 함유하고 있다. 이 식당에서 고기는 1kg에 6,000원, 야채는 1kg에 1,000원씩에 구입하고 있다. 김선생님은 학생들의 건강을 적절히 유지하면서 식품 구입비를 최소로 하는 구매계획을 세우고자 한다.

이 문제를 해결하는 선형계획모형을 세우기 위하여 먼저 변수를 다음과 같이 정의한다.

$X_1 =$ 1인당 1일 고기구매량 (kg)

$X_2 =$ 1인당 1일 채소구매량 (kg)

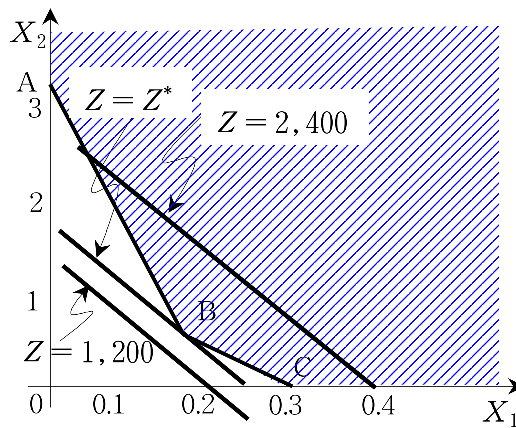
그러면 선형계획모형은 다음과 같다.

$Z = 6,000X_1 + 1,000X_2$ …① (총비용, 단위: 만원) 의 최소화

$300X_1 + 20X_2 \geqq 66$ …② (단백질제약식, 단위: g)

$30X_1 + 10X_2 \geqq 9$ … ③ (철분제약식, 단위: mg)

$X_1,\ X_2 \geqq 0$ … ④ (비음제약식)



[그림. 그래프 분석]

[그림. 그래프 분석]에서 점 B는 단백질 제약식 AB와 철분 제약식 BC가 교차하는 곳이므로 연립방정식

$$300X_1 + 20X_2 = 66$$

$$30X_1 + 10X_2 = 9$$

로부터 최적해

$$X_1 = 0.2,\ \ X_2 = 0.3$$

을 얻는다. 그리고 최소비용은

$$Z = 6,000 \cdot 0.2 + 1,000 \cdot 0.3 = 1,500 \text{ (원)}$$

이 된다. 즉, 학생들에게 하루에 고기 200g, 채소 300g을 제공하는 것이 최적이며 이 때의 비용은 일인당 1,500원이 소요된다.

다시 선형계획모형으로 돌아가서 제약식의 의미를 살펴보자. 첫 번째 제약식②

$$300X_1 + 20X_2 \geqq 66$$

은 단백질 제약식으로서 우변항 66은 단백질의 필요섭취량을 나타내며 좌변 $300X_1 + 20X_2$는 구매계획을 $(X_1,\ X_2)$로 세웠을 때의 단백질 섭취량을 나타낸다. 이 제약식은 단백질 섭취량이 필요량보다는 크거나 같아야 한다는 제약조건을 나타내고 있다. 어떤 구매계약에서는 섭취량이 필요량을 넘을 수도 있다. 섭취량이 필요량을 넘을 때는 잉여분의 섭취량이 있으며 이것은

$$S_1 = (300X_1 + 20X_2) - 66 \quad \cdots⑤$$

이 된다. 즉 S_1은 필요량 이사의 섭취량을 나타낸다. 그리고 제약식 ②가 만족되기 위해서는

$$S_1 \geqq 0 \quad \cdots⑥$$

이 되어야 한다. 이렇게 식 ⑤로 주어진 변수 S_1을 제약식 ②의 잉여변수라고 한다.

앞에서 구한 최적해에서의 각 제약시의 잉여변수가 얼마인가 알아보자. 먼저 단백질 제약식 ②는

$$S_1 = 300 \cdot 0.2 + 20 \cdot 0.3 - 66 = 0$$

이 되어 잉여변수의 값이 0이 된다. 즉 단백질 섭취량은 정확히 필요량을 만족시키고 있음을 의미한다. 그리고 제약식 ②는 최적해에서 등식으로 성립하게 되므로 속박적 제약식이라고 할 수 있다. 철분 제약식 ③도

$$S_2 = 30 \cdot 0.2 + 10 \cdot 0.3 - 9 = 0$$

이 되어 속박적이다.



심화활동자료

■■ 식단문제

매일의 식단을 구성함에 있어서 하루에 필요한 영양분 요구량을 만족시키면서 최소의 비용을 갖는 식단구성방법을 모색하자.

참치, 우유, 시금치 및 빵을 이용하여 비타민 A, C, D와 철분의 1일 필요량을 만족하는 최소비용의 식단을 구성하려고 한다. 각 음식의 영양분 함유량과 가격이 다음 표에 나와 있다.

영양분	우유 (리터)	참치 (kg)	빵 (한줄)	시금치 (kg)	1일 필요량
비타민A (단위: IU[4])	1,600	500	0	70,000	5,000
비타민C (단위: mg)	10	0	0	140	30
비타민D (단위: IU)	120	0	0	0	100
철분 (단위: mg)	7	14	13	16	12
가격 (원)	1,000	3,000	650	600	-

4) 비타민 D 1 ug = 1 mcg = 40 국제단위(IU)

ug=>마이크로그램(유럽에서는 ug대신에 mcg라고 쓰기도 함.)
1kg=1000g, 1g=1000mg, 1mg=1000ug
IU = international unit, 효소나 비타민의 활성이나 양을 나타내는 단위

다음 표는 한국인의 1일 비타민 D 권장량(출처: 한국인 영양 권장량 제 7개정).

한편, 음식의 맛을 유지하기 위해서 참치는 최소한 0.1kg 이상, 빵은 반줄 이상 포함되어야 한다.

1. 이 문제에서는 매일의 각 음식의 섭취량을 결정하는 것이 문제이므로 수식화 시키기 위한 변수설정은

$x_1 =$ 우유 소비량,

$x_2 =$ 참치 소비량,

$x_3 =$ 빵 소비량,

$x_4 =$ 시금치 소비량

으로 한다.

2. 그러면 총비용은

$x_2 + 3x_2 + 0.65x_3 + 0.6x_4$ (천원)

이 되어 이 목적함수를 최소화하는 (x_1, x_2, x_3, x_4)를 구해야 한다.

3. 반면에 이 변수들이 만족시켜야 하는 조건들을 생각해 보면 비타민 A의 경우 우유 1리터는 1,600IU, 참치 1kg은 500IU, 시금치 1kg은 70,000IU를 포함하며 빵은 비타민 A를 함유하고 있지 않으므로 비타민 A의 섭취량은

$$1,600x_1 + 500x_2 + 70,000x_4$$

가 되고 일일필요량을 만족시키기 위해서는

$$1,600x_1 + 500x_2 + 70,000x_4 \geq 5,000$$

이 되어야 한다. 마찬가지로 다른 세 가지 영양분에 대한 제약식들을 만들 수 있다. 또 음식의 맛을 유지하기 위해서는 참치는 최소한 0.1kg을 포함하여야 하므로 다음의 제약식이 필요하다.

월령, 연령	양	비고
0 - 4개월	5ug	조제분유 복용시에는 10ug
5 - 10개월	10ug	
1 - 9세	10ug	
10 - 19세	10ug	
20 - 49세	5ug	수유부나 임산부는 5ug씩 추가로 복용.
50세 이상	10ug	따라서 성인의 경우 보통 400IU정도 복용.

출처 : http://kin.naver.com/browse/db_detail.php?d1id=7&dir_id=707&docid=365584

$x_2 \geqq 0.1$

빵 섭취량에 대한 제약식도 비슷하게 만들 수 있다.

4. 이를 정리하면 다음과 같다.

$x_1 + 3x_2 + 0.65x_3 + 0.6x_4$ 의 최소값

$1,600x_1 + 500x_2 + 70,000x_4 \geqq 5,000$

$10x_1 + 1400x_4 \geqq 30$

$120x_1 \geqq 100$

$7x_1 + 14x_2 + 13x_3 + 16x_4 \geqq 12$

$x_2 \geqq 0.1$

$x_3 \geqq 0.5$

$x_1, x_2, x_3, x_4 \geqq 0$

지도초점
이 문제의 경우에는 변수가 많아 그래프로 나타내기가 어렵고 해결을 위해서는 컴퓨터의 도움(프로그램)을 받아야 계산이 가능함을 이해시키고 , 여기서는 단지 문제를 해결해 나가는 과정을 이해하며 수식으로 나타낼 수 있는 정도로 마무리하게 한다.

5. 이것을 컴퓨터를 이용하여 풀면 최적해는 다음과 같다.

$(x_1, x_2, x_3, x_4) = (0.83, 0.1, 0.5, 0.15)$

최소비용=1,552원

따라서 하루에 우유 0.83리터, 참치 0.1kg, 빵 반줄, 시금치 0.15kg을 섭취하는 것이 가장 저렴한 방법이며 이 경우 1,552원의 비용이 소요된다.

■■ 배합문제

B사는 금년에 두 종류의 비료를 생산하여 팔려고 한다. 하나는 일반용 비료이며 또 하나는 특수비료이다. 비료는 두 가지 원료를 섞어서 만드는데 각 원료는 질소와 인산의 함유비율이 다르다. 각 원료의 가격 및 성분함유비율은 다음 표와

같다.

원료	가격(원/kg)	질소(%)	안산(%)
1	1,000	60	10
2	1,500	10	40

이번 달에는 특수비료가 25kg짜리 부대로 5,000부대, 일반용이 7,000부대가 팔릴 것으로 보인다. 특수비료는 질소의 함유량이 40~50%이어야 하며 일반용 비료는 20% 이상의 인산을 함유하여야 한다. 최소의 비용으로 수요를 만족시키려면 어떻게 혼합하여 생산해야 할 것인가?

1. 이 문제를 선형계획모형으로 정식화하기 위해 다음과 같이 변수를 설정하자.

   X_1: 특수비료 생산에 투입된 원료 1의 양 (kg)

   X_2: 특수비료 생산에 투입된 원료 2의 양 (kg)

   Y_1: 일반용 비료 생산에 투입된 원료 1의 양 (kg)

   Y_2: 일반용 비료 생산에 투입된 원료 2의 양 (kg)

2. 먼저, 목적함수는 생산비용으로서

$$1,000X_1 + 1,500X_2 + 1,000\,Y_1 + 1,500\,Y_2$$

를 최소화하는 것이 된다. 특수비료수요를 만족시키기 위해서는

$$X_1 + X_2 \geqq 25 \times 5,000 = 125,000$$

이 되어야 하며, 일반용 비료에 대해서는

$$Y_1 + Y_2 \geqq 25 \times 7,000 = 175,000$$

이 된다.

3. 또한 특수비료의 질소함유량은 40%와 50% 사이이어야 하므로 이에 해당하는 제약식은

$$\frac{0.1X_1 + 0.1X_2}{X_1 + X_2} \geqq 0.4 \text{ 와}$$

$$\frac{0.6X_1 + 0.1X_2}{X_1 + X_2} \leqq 0.5$$

가 된다. 먼저 첫 부등식의 분모를 이항하여 정리하면 첫 부등식은 다음의 선형

의 제약식과 같아진다.

$$2X_1 - 3X_2 \geqq 0$$

마찬가지로 두 번째 식은

$$X_1 - 4X_2 \leqq 0$$

과 같아진다. 같은 방법으로 일반용 비료의 인산함유량이 20% 이상이어야 한다는 조건을 정리하면

$$Y_1 - 2Y_2 \leqq 0$$

을 얻는다.

지금까지 나온 내용을 정리하면 선형계획모형은 다음과 같다.

$1,000X_1 + 1,500X_2 + 1,000Y_1 + 1,500Y_2$ 의 최소값?

$$X_1 + X_2 \geqq 125,000$$

$$2X_1 - 3X_2 \geqq 0$$

$$X_1 - 4X_2 \leqq 0$$

$$Y_1 - 2Y_2 \leqq 0$$

$$X_1, \ X_2, \ Y_1, \ Y_2 \geqq 0$$

4. 이 모형을 컴퓨터를 이용하여 풀면 최적해는 다음과 같다.

최적해: $(X_1, \ X_2, \ Y_1, \ Y_2) = (100,000, \ 25,000, \ 116,667, \ 58,333)$

최소비용=3억 4,167만원

따라서 원료 1과 2를 각각 100,000kg, 25,000kg을 섞어서 특수비료 125,000kg을 만들고, 원료 1과 2를 각각 116,667kg, 58,333kg을 섞어서 일반비료 175,000kg을 만드는 것이 최적이며 이 경우 총비용은 3억 4,67만원이 소요된다.



읽기자료

■■ 선형계획법의 응용사례

한신고속도로는 일본 오사카에 세워진 최초의 유료 고속도로이다. 처음 196년에는 불과 2.3km이었으나 지금은 200km에 달하는 대규모 도심지역 고속도로가 되었다. 한신고속도로는 일본에서 두 번째로 인구가 밀집된 지역인 한신지역(오사카-고베)에 있다. 평균 하루에 82만 8,000대의 차량이 이 고속도로를 이용하고 있으며 때로는 100만대를 넘기도 한다. 1990년에 한신고속도로관리공사에서는 이 고속도로 네트워크를 흐르는 차량의 수를 극대화하기 위하여 자동화된 교통제어시스템을 사용하기 시작하였다.

자동교통제어시스템은 두 가지의 제어방법을 사용하고 있다. 첫 번째는 고속도로의 각 진입로에서 고속도로에 진입하는 차량의 수를 통제하는 방법이며 두 번째는 운전자들에게 예상 소요 시간이나 사고 현황 등 시시각각의 교통상황을 정확하게 알리는 것 등이다.

첫 번째 방법인 진입 차량 수를 통제하는 방식은 이 고속도로가 정상적인 상태에 있는지 아니면 사고나 정체 등의 비정상적인 상태에 있는지에 따라 달라진다. 정상적인 상태에서는 한신교통제어시스템은 정체 상태를 유발하거나 주변도로에 악영향을 주지 않는 범위에서 이 고속도로를 사용할 수 있는 최대 차량 수를 계산하기 위하여 선형계획모형을 사용한다. 선형계획모형에 필요한 데이터들은 진입로와 출구에 설치된 감지기와 고속도로를 따라 500m마다 설치된 감지기들에서 수집된 것이다. 매 5분마다 감지기에서 실시간 데이터가 수집되어 선형계획모형을 통해 고속도로를 이용할 수 있는 최대의 차량수가 계산된다.

이 자동화된 교통제어시스템은 매우 성공적이었다. 설문조사에 의하면 이 시스템은 정체구간의 길이를 30%, 정체시간을 20% 감소시켰다. 이 시스템은 비용면에서도 매우 효과적이었고 모든 운전자들은 이 시스템은 꼭 있어야 하는 시스템이라고 평했다.

(Interface지 1995년 1/2월호에서 인용[5])

■■ 가장 경제적인 식단

1945년 미국 컬럼비아 대학 교수였던 스티글러 (Stigler, G., 1911~)는 가장 저렴하면서도 하루에 필요한 열량, 단백질, 칼슘, 철분, 비타민A, 티아민(비타민

---

5) 김세헌(2003) 저, 현대경영과학, p39에서 재인용

B_1), 리보플라빈(비타민 B_2), 니아신 및 아스코르브산(비타민 C)을 모두 섭취할 수 있는 식단을 연구하였다.

그는 70가지의 식품을 조사한 결과, 가장 저렴하면서도 위에서 언급한 영양소를 모두 만족하는 식단은 밀가루, 양배추, 돼지의 간을 조합하면 된다는 것을 알았다. 이들을 사용하여 1945년 당시의 가격으로 식단을 짜면, 한 사람이 건강을 유지하면서 1년을 살아가는 데 $59.88가 필요하다는 것도 알았다. 그 후로 물가가 많이 올랐기 때문에 지금 가격으로는 약 $400가 필요할 것으로 추정된다.
이와 같이, 수학은 가장 경제적인 식단짜기에도 활용된다.



참고자료

1. 참고 서적 및 문헌

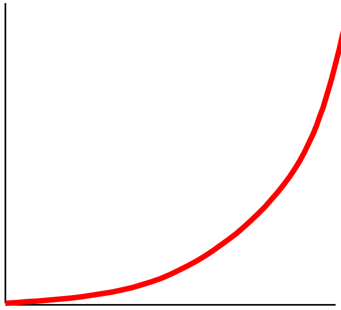
① 박달순(1984), 선형계획법, 대영사
② 이강섭(1985), 선형계획법, 희중당
③ 김세헌(2003), 현대경영과학, 무역경영사
④ Eves, H., 이우영・신항균 역(1999), 수학사, 경문사
⑤ Gass, S. I.(1985), Linear Programming ; Methods and Applications, 5th Ed., McGraw-Hill
⑥ 나카다 노리오 지음 김미옥 옮김, 박부성 감수(2001), 디즈니랜드에서 수학을 배우자, 이지북
⑦ 김수환 외 6 (2001), 고등학교 수학 10-나 교사용 지도서, 지학사
⑧ 양승갑 외 8 (2002), 고등학교 수학 10-나 교사용 지도서, (주)금성출판사
⑨ 신현성, 최용준(2001), 고등학교 실용수학 교사용 지도서, (주)천재교육

2. 관련 인터넷 사이트

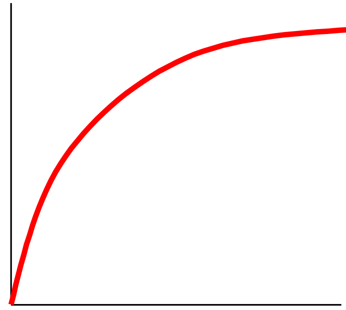
① http://www.aistudy.co.kr/ 인공지능 응용분야인 전문가시스템, 퍼지, 신경망 패턴인식 등에 관한 연구자료 제공
② http://oksem.pe.kr 한국인의 1일 비타민 권장량 안내

3. 기타 참고 정보

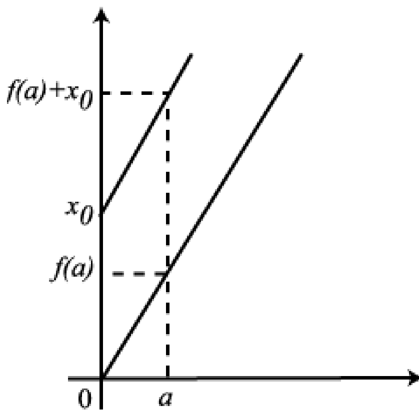
■■ 선형과 비선형 ☞참고자료이니 반드시 학습할 필요는 없습니다.

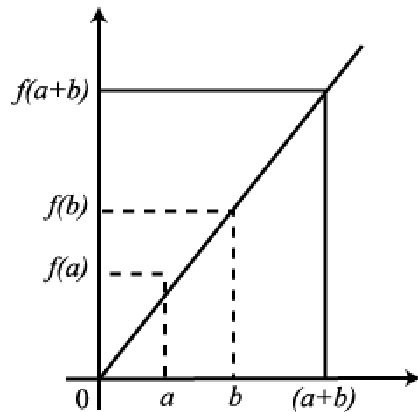


양의 비선형성



음의 비선형성





1. '선형'과 '비선형' 의 차이점은 무엇인가?

1차식이나 1차함수들을 선형이라고 한다는 것은 이미 잘 알 것이다. '선형'이란 (그래프가) 직선으로 나타난다는 뜻이다. 1차식의 그래프는 (직)선형이다.
카오스는 명백하고 간단한 운동을 하는 선형에서는 일어나지 않으며, 오직 비선형의 상태에서 문제가 된다. 이처럼 선형은 단순하다. 하나의 원인에는 하나의 결과가 있을 뿐이며, 결과를 보고 원인이 어떤 것이었는지 짐작할 수 있다. 그러나 비선형은 그렇지 않다.

선형과 비선형의 차이를 비유적으로 개미를 가지고 설명해 보자. 개미들이 선형적으로 협동할 때는 개미의 숫자와 비례해서 무거운 먹이를 운반할 수 있다. 그러나 만약 개미가 비선형적인 협력을 할줄 안다면, 이전보다 더 적은 수의 개미로도 더 무거운 먹이를 운반할 수 있다. 바로 이것이 선형과 비선형의 차이이

다. 비선형은 이처럼 우리가 예상하지 못했던 훨씬 높은 차원의 현상을 일으킨다. 지금의 기술 수준으로는 비선형 현상을 마음대로 제어할 수 없기 때문에 비선형성은 그다지 환영받지 못한다. 그러나 앞으로의 과학기술은 비선형성의 활용에서 많은 성과를 얻어낼 수 있을 것이 틀림없다.

카오스는 비선형 방정식 가운데서 특히 피드백(feed back)의 성질을 갖는 대상에서 발생한다. 피드백은 하나의 방정식이 있을 때, 그 식에서 나온 결과가 계속 반복적으로 같은 식에 대입되는 성질을 갖는다. 겉보기에는 간단한 것 같지만, 피드백이 되풀이되면서 상황이 매우 복잡하게 변화한다. 식은 하나이지만 그것으로부터 나온 결과는 수시로 바뀌기 때문에 예측이 어렵다. 축구 경기에서 각 선수들의 순간마다의 위치를 알아 맞추는 일처럼 말이다. 한 발짝 움직일 때마다 공의 위치가 바뀌므로 선수들의 위치가 앞으로 어디에 있게 될지 도저히 짐작할 수도 없다.

뉴튼역학에서는 선형계가 주된 연구의 대상이었다. 선형계는 몇 개의 단순한 구성요소로 분석하여 그들의 특징을 파악하면 다시 종합함으로써 전체 행동을 추측할 수 있다. 이러한 특성 때문에 뉴튼역학의 대상은 주로 정량적인 방법이 사용된다. 비선형이라 해도 선형으로 근사시키는 선형화라는 방법으로 비선형의 항을 소거하여 근사적으로 단순한 형태로 바꾸어 그 행동을 예측할 수는 있다. 그러나 비선형계는 본질적으로 몇 개의 간단한 구성요소로는 분석이 불가능할 뿐만 아니라, 만약 분석이 된다고 해도 그것들이 종합될 때는 각 부분, 또는 요인들이 서로 상승작용하여 전체의 행동을 예측하기가 매우 어려워진다.
선형의 특성에 대해서 수학적으로 따져 보기로 하자.

1) f(x)가 선형함수일 때, 초기치 x_0를 정해 두면 $x=a$ (a는 임의값) 에 있어서의 답은 유일하게 결정된다.

이 법칙은 하나의 원인에서 유일하게 결과가 딱 부러지게 나온 것이므로 선형의 전형적이고 결정론적인 성격을 나타낸다. 그러나 (1)의 성질은 반드시 선형법칙만을 갖는 것은 아니다. 가령, $f(x)=x^2$ 은 (1)의 성질을 갖고 있지만, 그래프는 포물선이 되므로 선형함수가 아니다.

2) 선형함수에서는 $f(a)+f(b)=f(a+b)$가 성립한다.

일반적으로 $f(x)=nx$이면, $f(a+b)=n(a+b)=na+nb=f(a)+f(b)$ 이다. 이 특성 때문에 선형계에서는 미래를 정확히 예측할 수 있는 것이다.

한편, $y=x^2$이나 삼각함수는 선형이 아니다. 가령, $f(x)=x^2$일 때, $a=1$, $b=2$ 라고 놓으면 $f(a)=1$, $f(b)=4$이고, $f(a)+f(b)=1+4=5$ ·

한편, $f(a+b)=f(3)=9$이므로 $f(a+b)$와 $f(a)+f(b)$는 서로 다르다. 일반적으로 $f(a)+f(b)\neq f(a+b)$이다.

이상에서 본 것처럼 선형은 다음 두 가지의 성질을 특징적으로 갖는다.

(1) 초기치 x_0를 정해두면 임의값 a에 있어서의 답은 유일하게 결정된다.
(2) 선형함수에서는 다음 ①, ②가 성립한다.
① $f(a)+f(b)=f(a+b)$
② $f(na)=nf(a)$

이 선형함수로 나타내어지는 역학계가 바로 선형역학계이다. 선형역학계의 예로, 영국의 물리학자 후크(Robert Hooke, 1635~1703)가 발견한 '후크의 법칙'을 만족하는 용수철이 있다. 이 용수철은 힘을 가한 만큼 늘어난다($F=-kx$; F는 가한 힘, k는 용수철의 상수, x는 변형된 용수철의 길이). 즉, 용수철의 길이는 그에 가해진 힘에 비례하는 것이다. 그러나 실제의 용수철은 어느 한도 내에서만 후크의 법칙에 따르고, 그 이상에서는 비선형성을 보인다.

선형함수의 두 번째 특징은 요소환원주의의 입장과 일치한다는 점이다. 과학자들은 미지의 대상을 연구할 때, 우선 그것의 부분을 해체하고, 그것들의 요소가 무엇인지를 밝히고, 그 요소들이 우리가 익히 알고 있는 것들인가를 낱낱이 따진다. 그리하여 이들 요소의 종합으로 미지의 대상 전체를 '이해'했다고 생각한다. 이 요소환원주의적인 사고에는 다음과 같은 위험이 따른다. 즉, 비선형 방정식으로 나타내어지는 자연현상을 선형 방정식으로 근사적으로 나타낼 수 있고, 아주 복잡한 현상은 통계적으로 평균치를 구하면 된다고 안이한 생각을 하기 쉽다. 그러나 선형적인 현상은 자연계에서는 극히 특수한 경우이며, 오히려 비선형적인 현상이 보다 일반적인 것이다. 게다가 비선형을 선형에 근사시키는 일에는 한계가 있다.

이제까지의 과학은 좁은 선형의 세계가 주된 연구의 대상이었다. 그러나 우리의 주변에는 비선형적인 사건이 훨씬 더 많은 것이다. 어린이가 빨리 키가 크고 힘도 세지고 싶어서 밥을 많이 먹는다 하여도 먹는 양에 비례해서 키가 크거나 힘이 세지지 않는다. 물을 준 만큼 나무가 자라주지는 않는다. 엔진을 크게 한다고 자동차의 속도가 그에 비례해서 빨라지지는 않는다. 이처럼 우리 주변은 온통 비선형으로 가득찬 세계이다.

이러한 비선형성은 우리가 알지 못하는 무수한 요인들에 의해서 비롯된다. 앞에서 예를 든 용수철도 어느 한계 안에서는 후크의 법칙을 만족하는 선형성을 보이지만, 용수철이 오래되었거나 어느 한도 이상의 힘을 가하면, 용수철의 기계적인 작용 외에 용수철의 재질의 특성이 주요한 요인으로 작용하기 시작한다. 이렇게 한 가지 이상의 요인이 복합적으로 작용하므로 비선형성이 나타나는 것이다.

선형에서 비선형 현상으로 넘어가는 재미있는 예가 있다. 독일의 화학자 리비히(J. F. von Liebig, 1803~1873)에 의해 밝혀진 식물 생육에 필요한 영양분에 관한 '최소량의 법칙'이라는 것이 있다(이 법칙은 고교의 생물 교과서에도 나온다). 그 내용을 간추리면 다음과 같다.

식물이 자라는 데는 영양분이 골고루 갖추어져 있어도 한 가지 영양분이 부족하면, 그 때문에 식물의 성장이 제한을 받는다. 따라서, 이 결핍된 영양분을 주면 이에 비례하여 식물은 자라게 된다. 즉, 선형적이다. 그러나 그 영양분만 계속 공급한다고 해서 식물이 잘 자라는 것은 아니다. 어느 한계, 즉 다른 영양분의 한계까지만 선형성이 나타나고, 그 이상은 다른 영양분의 양에도 영향을 받기 때문에 비선형성이 나타나는 것이다.

한마디로 비선형이라고 하지만, 이 현상을 더 자세히 살펴보면 거기에는 두 가지 양상이 나타난다. 즉, 비선형계의 각 요소의 변화의 합이 전체의 변화보다 작을 때가 있고, 클 때가 있는 것이다. 이것을 각각 '양의 비선형성', '음의 비선형성'이라고 부른다. 특히 양의 비선형성은 생명현상과도 깊은 관련이 있다.

출처 http://blog.naver.com/post/postView.jsp?blogId=hongcom&logNo=120000454806
http://www.aistudy.co.kr/ 인공지능 응용분야인 전문가시스템, 퍼지, 신경망 패턴인식 등에 관한 연구자료 제공

■■ 선형계획법의 해의 영역 ☞교사를 위한 참고자료입니다.

[정의 1] 영역 안의 임의의 두 점을 잇는 선분이 모두 그 영역에 포함될 때, 이 영역을 볼록영역(convex region)이라고 한다.

[정의 2] n차원 공간 R_n에서

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = d \cdots ①$$

를 만족하는 점 $P(x_1,\ x_2, \cdots, x_n)$의 집합을 n차원 초영역(hyper

region)이라고 한다.

[정의 3] $a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n \leqq d$ ⋯ ②

를 만족하는 점 $P(x_1, x_2, \cdots, x_n)$의 집합은 R_n의 한쪽 부분공간이므로, 이것은 폐반공간(closed half space)이라고, 초영역 ①을 ②의 반공간의 경계(boundary)라고 한다.

[정의 4] 유한개의 폐반공간의 공통부분인 볼록영역을 볼록다면체(convex polyhedron)라고 한다.

이차원 공간 R_2, 삼차원 공간 R_3에서 볼록다각형 또는 볼록다면체는 그 내부에 비어 있는 부분이나 오목한 부분을 갖지 않은 도형이다. 또, 경계의 교점을 그 영역의 단점(end)이라고 한다.

[정의 5] 앞페이지의 선형계획법의 제약조건 ①, ③은 $(m+n)$개의 폐반공간의 교집합으로 이루어지는 볼록영역을 나타낸다. 이것을 가능영역(feasible region)이라고 한다.

[정 리] 선형계획의 목적함수

$$C \cdot X = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n$$

은 유계인 가능영역 V의 단점에서 최대값 M을 갖는다.

만약에 최대값 M을 주는 단점이 두 개 이상 있으면, 이들을 꼭지점으로 하는 볼록다면체 안의 모든 점에서 목적함수의 값은 M이 된다.



학습 활동

■■ 의사결정과 최적화하기

1. 부등식의 영역의 이론적·역사적 배경

일상생활에서 여러 가지 가능성이 있을 때, 그 중에서 가장 적당한 것을 찾아내는 방법, 곧 의사결정변수(decision value)들 가운데서 가장 적절한 값을 찾아내는 것이 최적화이론(optimization)입니다. 수학분야에서는 최적화의 문제를 일정 조건을 만족하는 영역에서 최대값과 최소값을 구하는 문제에서 주로 다루게 됩니다. 최적화의 문제는 예로부터 오늘날에 이르기까지 물건의 생산, 인력의 효율적인 배치 등 여러 가지 경제활동에 필요한 연구 분야가 됩니다.

2. 최적화 이론

최적화(optimization) 이론과 그 해법은 일찍이 수학의 한 분야로서 유럽과 미국에서 여러 분야의 학자들에 의해 많이 연구되어 왔으며 제2차 세계대전 이후에는 산업, 군사, 행정 등의 여러 조직에 적극적으로 활용되기 시작하여 생활에 많은 변화를 가져왔습니다.

사실 일상생활에서 무의식적으로 최적화의 개념을 인식하고 있으며 그 해법 또한 나름대로 가지고 있습니다. 예를 들어 어떠한 물건을 구입하려할 때 우리는 몇 가지 종류 중에서 구입이유, 사용기간, 애프터서비스 사용대상, 구입가격 등의 여러 조건을 비교 검토한 후 결정을 내리게 된다. 물론 수학적인 기호나 컴퓨터를 통한 계산은 하지 않고 정형적인 모델은 수립하지 않더라도 그 방법론에 있어서는 최적화 기법이 그대로 적용되고 있다고 할 수 있습니다.

더욱이 생활주변에서 '최대의 효과', '최소의 비용', '최적의 선택' 등의 단어를 자주 접하고 있는데 최적화 기법을 체계적인 접근방법으로 이용하여 의사결정을 하기는 그리 쉬운 일이 아니며 또한 그 결정의 질을 평가하기도 무척 어려운 일입니다.

현재 선진국에서 최적화 기법을 가장 폭넓게 사용하고 있는 분야는 생산 및 재고관리, 공장 내 기계 및 설비 배치, 생산 공정 관리, 도시 건설, 도로 건설, 교통 통제 시스템 수립, 철도·항공·해운 등의 운항 노선 결정, 운항 계획 수립, 승무원 관리 계획, 송전 배선 네트워크 수립, 상하수도 파이프 네트워크 수립, 프로젝트 관리, 인력 수급 계획, 컴퓨터 전화 또는 인공위성 등의 통신망 구성, 전자 회로 디자인, 화학 물질 배합, 정유 공정, 물류 센터 위치 선정, 물류 수송 계획 등과 같이 다양하게 있으나 우리나라에서 실질적으로 모델 정립 및 해법을 통한 솔루션 이용은 그렇게 많지 않은 편입니다.

그러나 제품의 질을 향상시키고 원가를 절감하여 산업의 경쟁력을 키우며 공공서비스의 향상을 통해 삶의 질을 높여야 하는 것이 우리가 당면한 시급한 과제 중 하나이므로 최적화 기법의 올바른 이해, 폭넓은 연구와 적용이 절실히 필요하다고 할 수 있습니다.

또한 일본 등 선진 외국에서는 이러한 기법을 이용하여 모든 경작지에 지하수로 건설을 시도하려고 한다. 이러한 문제에서는 일정한 수압을 유지시키기 위한 펌프의 위치와, 용량결정과 지역마다 다른 수요에 대응하는 파이프의 지름을 결정하여 적절한 양의 물을 항상 공급함으로써 농작물 생산에 일대 혁신을 꾀하려 하고 있습니다. 이들과 유사한 형태의 문제 중에서 현재 우리나라에서 가장 관심의 대상이 되고 있는 부문은 인공위성, 전화, 컴퓨터 등의 통신 네트워크라고 할 수 있습니다.

3. 선형계획법

1939년 러시아 수학자인 칸토르비치(Kantoro-vich)는 그의 논문 □□조직과 생산 계획에서의 수학적 방법□□에서 여러 가지 생산 계획의 문제는 같은 유형의 수학적인 문제로 형식화하여 해결할 수 있음을 시사하였습니다.

1941년 히치콕(Hitchcock)은 대표적인 선형계획 문제의 하나인 수송 문제를 수식화하여 해법을 제공하였고, 1945년 스티글러(Stigler)는 최소의 비용으로 영양을 섭취하는 다이어트 문제(Diet problem)의 해법을 다루었습니다.


Dantzig

제2차 세계대전 중 영국에서는 과학자들로 하여금 부족한 전시물자 문제를 연구하도록 하였으며, 미국 공군에서는 군수물자 배급 문제를 해결하기 위한 연구팀을 구성하였습니다. 이 연구팀의 일원인 단지그(Dantzig)는 1947년 선형계획 문제의 해법인 단체법(The Simplex Method of Optimization)으로 수학계에 큰 공헌을 하게 되었으며 미 공군에서 계산기에 의존하던 수 많은 문제를 해결해 주었습니다. 그의 이론이 발전하여 선형계획법이라는 학문으로 정착을 하였으며 경제뿐만 아니라 실생활에도 많은 발전을 초래하였습니다.

선형계획 문제는 단체법으로 그 수학적 해법은 마련되었지만 미지수가 그리 많지 않은 경우에도 손으로 계산하기에는 그 계산량이 엄청나기 때문에 컴퓨터의 도움이 없이 실제 문제를 해결하기는 어려웠습니다.

다행히 거의 같은 시기에 컴퓨터가 출현하였고 이에 따라 복잡한 계산이 가능해지면서 단체법은 경영경제 분야에서 크게 주목을 받기 시작하였습니다.

1951년 이후 선형계획 문제는 이론적인 연구와 실제적인 응용이 본격화되었습니다. 게일(Gale) 등은 최소 문제를 최대 문제로, 최대 문제를 최소 문제로 바꾸어서 그 해법을 구하는 쌍대 문제에 관한 이론을 연구하였고, 쿠퍼(Cuper)는 선형계획 문제를 산업공학에 응용하여 산업공학 분야 발전에 큰 기여를 하였습니다.

4. 선형계획법의 이론적 구조

가. 선형계획의 최대 문제

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3+\cdots+a_{1n}x_n \leqq d_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+a_{23}x_3+\cdots+a_{2n}x_n \leqq d_2 \\ a_{31}x_1+a_{32}x_2+a_{33}x_3+\cdots+a_{3n}x_n \leqq d_3 \\ \quad \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+a_{m3}x_3+\cdots+a_{mn}x_n \leqq d_m \\ x_k \geqq 0\ (k=1,2,\cdots,n) \end{cases} \quad \cdots \text{①}$$

과 같은 $(m+n)$개의 제약 조건 아래에서

$$c_1x_1+c_2x_2+c_3x_3+\cdots+c_nx_n \quad \cdots \text{②}$$

의 값을 최대로 하는 $x_k(k=1,2,\cdots,n)$를 구하는 문제를 **선형계획법의 최대화 문제**라고 합니다.

위의 일차식 ②를 **목적함수**라 하고, 제약조건 ①을 만족하는 해 x_k $(k=1,\ 2,\ \cdots,\ n)$를 **가능해**(feasible solution)라고 합니다. 가능해 중에서 ②의 값을 최대로 하는 것을 이 문제의 **최적해**(optimal solution)라고 합니다.

나. 선형계획의 최소문제

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3+\cdots+a_{1n}x_n \geqq d_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+a_{23}x_3+\cdots+a_{2n}x_n \geqq d_2 \\ a_{31}x_1+a_{32}x_2+a_{33}x_3+\cdots+a_{3n}x_n \geqq d_3 \\ \quad \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+a_{m3}x_3+\cdots+a_{mn}x_n \geqq d_m \\ x_k \geqq 0\ (k=1,\ 2,\ \cdots,\ n) \end{cases} \quad \cdots \text{③}$$

과 같은 $(m+n)$개의 제약 조건 아래에서

$$c_1x_1+c_2x_2+c_3x_3+\cdots+c_nx_n \quad \cdots \text{④}$$

의 값을 최소로 하는 $x_k(k=1,2,\cdots,n)$를 구하는 문제를 **선형계획법의 최소화 문제**라고 합니다.

위의 식 ④를 **목적함수**라 하고, 제약조건 ③을 만족하는

$x_k(k=1, 2, \cdots, n)$를 **가능해**라고 합니다. 가능해 중에서 ④의 값을 최소로 하는 것을 이 문제의 **최적해**라고 합니다.

1) 최소화 문제는 최대화 문제로 귀착될 수 있습니다. 최소화 문제의 식 ③, ④를 이용하여 최대화 문제로 바뀌는 과정을 설명하여 봅시다.



학습 활동

선형계획법을 적용하여 문제를 해결하여 봅시다.

■■ 놀이 기구 문제

지명이는 친구들과 함께 놀이기구를 타러 놀이동산에 갔다. 놀이 기구 P, Q 를 한 번 타는 데 요금은 각각 800원, 1200원이고 시간은 각각 10분, 5분씩 소요된다. 지명이가 놀이동산에서 놀 수 있는 시간은 40분 정도이고 쓸 수 있는 돈은 4,800원이다. 이 조건에서 지명이는 놀이기구 P, Q 를 최대한 많이 타기를 원한다. (단, 놀이기구를 타기 위해 기다리는 시간은 없는 것으로 가정하자.)

1) 놀이 기구 P, Q를 한 번 탈 때, 요금과 시간 사이의 관계를 표로 나타내어 보시오.

구분 \ 놀이기구	P	Q
요금(원)		
시간(분)		

2) 지명이가 놀이기구 P, Q를 타는 횟수를 각각 x, y 라고 할 때, x, y 사이의 연립부등식을 구하시오.

3) 이 연립부등식을 좌표평면에 그려 보시오.

4) 놀이 기구 P, Q의 이용 가능한 횟수에 해당하는 좌표 $(x,\ y)$를 찾아보고, 그때 소요되는 비용과 시간을 구해 보시오.

구분 \ 이용 횟수	(,)	(,)	(,)	(,)	(,)	(,)	(,)
비용							
시간							

5) 지명이는 놀이 기구 P, Q를 각각 몇 번씩 타야 최대한 많이 탈 수 있는가?



학습 활동

■■ 식품에 포함된 열량

다음은 우리가 흔히 접하는 식품에 포함된 열량을 1인분 기준으로 조사한 것이다.

(단위 : cal)

식사		반찬		후식	
식품	열량	식품	열량	식품	열량
쌀밥	325	근대된장국	50	사과(1개)	175
라면	525	김치찌개	125	아이스크림	200
김밥	475	불고기	150	우유	125
자장면	500	배추김치	25	콜라	100

1) 어떤 사람이 위의 표에 있는 음식 중에서 식사, 반찬, 후식을 하나씩만 택할 때, 섭취할 수 있는 열량의 최대값과 최소값을 갖는 음식의 조합과 그 값을 구하시오.

① 섭취할 수 있는 열량의 최대값을 갖는 음식의 조합과 그 값을 구하시오.

② 섭취할 수 있는 열량의 최소값을 갖는 음식의 조합과 그 값을 구하시오.

2) 스케이팅을 할 때 몸무게 5kg당 1분에 1cal가 소모된다고 한다. 몸무게 50kg인 사람이 1시간 동안 스케이팅을 한 후에 소모된 열량을 채우기

위하여 식사, 반찬, 후식을 하나씩 택하였다. 가장 근접하는 경우를 생각하고, 이 때, 남은 열량 또는 모자라는 열량을 계산하여 보시오.

3) 성인 여자는 평균 2000 cal, 남자는 2500 cal를 하루에 소모한다. 각자의 식단을 작성하여 보시오

① 여자 식단(2000 cal)

구분	식 단	총열량(cal)
아침		
점심		
저녁		

② 남자 식단(2500 *cal*)

	식단	총열량(cal)
아침		
점심		
저녁		



학습 활동

■■ 튀김닭과 옥수수의 열량 섭취 문제

어느 음식점에서 판매하는 1조각의 가격은 900원이고, 옥수수 1개의 가격은 750원이다. 또, 튀김닭 1조각에는 비타민 A가 100단위, 칼륨이 0㎎, 철분이 1.2㎎ 들어 있으며, 열량은 120㎈이다. 옥수수 1개에는 비타민 A가 300단위, 칼륨이 150㎎, 철분이 1.0㎎ 들어 있으며, 열량은 60㎈이다.

비타민 A를 1000단위 이상, 칼륨은 150㎎ 이상, 철분은 6㎎ 이상, 열량은 600㎈ 이상 섭취하면서 구입 가격을 최소로 하려면 튀김닭 몇 조각과 옥수수 몇 개를 사야 할까요?

1) 위의 문제를 표로 정리하여 보시오.

종류	비타민 A	칼륨(㎎)	철분(㎎)	열량(㎈)	1개당 가격
튀김닭					
옥수수					
섭취한계					

2) 문제의 뜻에 맞는 식을 세워 보시오.

3) 주어진 연립부등식의 영역을 그래프로 나타내시오.

4) 이 영역에 있는 꼭지점의 좌표를 구하고, 이들 점에서

$$900x + 750y = k$$

의 값을 구하여 다음 표를 완성하시오.

꼭지점	(0, 10)	(4, 2)	(7, 1)
k			

5) 답을 구해 보시오.



학습 활동

■■ 최대 이익은 얼마일까?

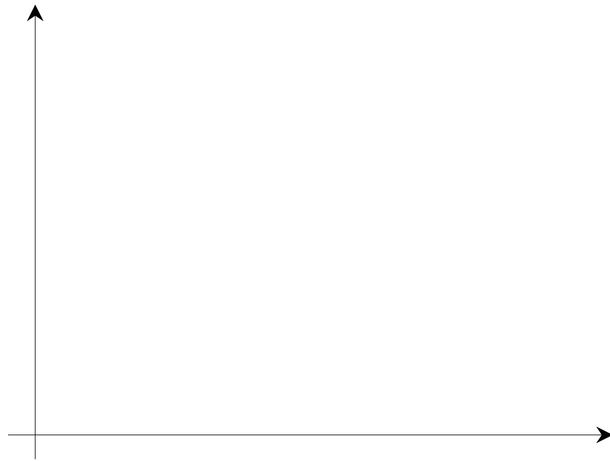
식탁용 나이프와 포크를 생산하는 S실업은 현재의 생산설비를 가지고 이익을 최대로 할 수 있도록 각 제품의 생산량을 결정하려 하고 있다. 이 제품들은 품질이 우수하여 생산된 제품전량이 수출되고 있는데 각각 케이스당 8,000원과 6,000원의 이익이 발생한다. 이 제품들은 프레스공정과 광택공정을 거치게 되는데 다음 일주일간 각 공정에서 사용가능한 인력은 프레스공정의 경우 700시간이며, 광택공정의 경우, 1,000시간으로 추정된다. 한편, 나이프 한 케이스 생산에는 12분(0.2시간)의 프레스공정 인력과 30분(0.5시간)의 광택공정 인력이 소요되며, 포크 한 케이스 생산에는 24분(0.4시간)의 프레스공정 인력과 15분(0.25시간)의 광택공정 인력이 소요된다. S실업은 다음 일주일간의 나이프와 포크의 생산량을 총이익이 최대가 되도록 결정하고자 한다.

일반적으로 의사결정의 문제에는 두 가지의 요소가 있다. 가능한 대안의 분석과 각 대안에 대한 선호도의 분석이다. 먼저 선호도를 보면 이 문제는 이익 증대가 목적이므로 이익 발생이 많이 되는 대안이 더 바람직할 것이다. 따라서 이 문제에 있어서 선호도는 총이익으로 표현될 수 있다.

1) 먼저 이 문제를 해결하기 위해 수식화하는 작업이 필요하다. 변수를 설정하여 보시오.

2) 구하고자 하는 것은 무엇이며 주어진 조건은 어떤 것이 있나요? 식으로 만들어 봅시다.

3) 그래프로 나타내어 보시오.



4) 총이익의 최대값은 얼마인가?



학습 활동

■■ 일반앰프와 고성능앰프를 생산하는 소규모 전자회사인 F전자는 현재의 생산능력 안에서 이익이 최대가 되도록 각 제품의 생산량을 결정하려고 하고 있다. 앰프생산은 조립공정과 검사공정을 거치게 되는데, 각 공정에서 하루에 이용 가능한 인력은 각각 240시간 및 81시간이고, 일반앰프를 생산하는 데에는 개당 1.2시간의 조립공정과 0.5시간의 검사공정 인력이 소요되며, 고성능앰프 생산의 경우 개당 4시간의 조립공정과 1시간의 검사공정 인력이 소요된다. 특히 고성능앰프의 경우 특수 반도체칩이 1개씩 소요되는데 최근 이 칩의 공급이 원활하지 못하여 하루에 40개씩만을 조달할 수 있다. 이 회사에서 생산된 앰프는 품질이 좋아서 전량 판매되고 있으며 일반앰프는 개당 20만원, 고성능앰프는 개당 50만원의 이익을 내고 있다.

1) 먼저 이 문제를 해결하기 위해 수식화하는 작업이 필요하다. 변수를 설정하여 보시오.

2) 구하고자 하는 것이 무엇인지 설명하고 수식으로 나타내어 보시오.

3) 그래프로 나타내어 보시오.



4) 총이익의 최대값은 얼마인가요?

5) 총이익이 최대가 될 때 일반앰프의 생산량과 고성능앰프의 생산량은 각각 얼마인가요?

6) 총이익이 최대가 될 때 앰프의 생산량이 정수가 아니면 이를 어떻게 해석해야 할까요?

7) 만일 자원의 확보를 위하여 신규투자를 한다면 반도체칩 공급량의 추가확보와 생산공정의 처리능력 확충 중에 어느 분야에 투자해야 타당할까?



학습 활동

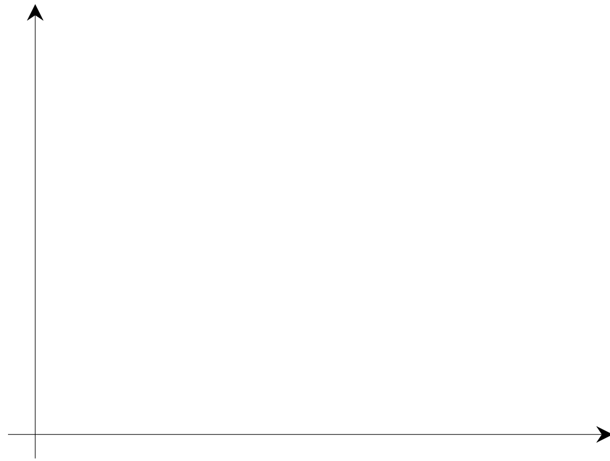
■■ 최소화문제

A중학교 구내식당의 영양사인 김선생님은 학생들이 적절한 건강을 유지하기 위해서는 매일 단백질 66g과 철분 9mg을 섭취하여야 한다는 것을 알고 있다. 이 영양분들은 고기와 야채를 통해 제공되는데 고기는 1kg에 300g의 단백질과 30mg의 철분을 함유하고 있으며, 야채는 1kg에 20g의 단백질과 10mg의 철분을 함유하고 있다. 이 식당에서 고기는 1kg에 6,000원, 야채는 1kg에 1,000원씩에 구입하고 있다. 김선생님은 학생들의 건강을 적절히 유지하면서 식품 구입비를 최소로 하는 구매계획을 세우고자 한다.

1) 먼저 이 문제를 해결하기 위해 수식화하는 작업이 필요하다. 변수를 설정하여 보시오.

2) 구하고자 하는 것이 무엇인지 설명하고 수식으로 나타내어 보시오.

3) 그래프로 나타내어 보시오.



4) 식품 구입비를 최소로 할 때 학생들에게 하루에 제공할 고기와 채소의 양은 얼마로 하여야 하는가? 또 그 때의 식품 구입비는 얼마인가?



심화학습 활동

■■ 식단문제

매일의 식단을 구성함에 있어서 하루에 필요한 영양분 요구량을 만족시키면서 최소의 비용을 갖는 식단구성방법을 모색하자.

참치, 우유, 시금치 및 빵을 이용하여 비타민 A, C, D와 철분의 1일 필요량을 만족하는 최소비용의 식단을 구성하려고 한다. 각 음식의 영양분 함유량과 가격이 다음 표에 나와 있다.

영양분	우유 (리터)	참치 (kg)	빵 (한줄)	시금치 (kg)	1일 필요량
비타민A (단위: IU[6])	1,600	500	0	70,000	5,000
비타민C (단위: mg)	10	0	0	140	30
비타민D (단위: IU)	120	0	0	0	100
철분 (단위: mg)	7	14	13	16	12
가격 (원)	1,000	3,000	650	600	-

한편, 음식의 맛을 유지하기 위해서 참치는 최소한 0.1kg 이상, 빵은 반줄 이상 포함되어야 한다.

1) 먼저 이 문제를 해결하기 위해 수식화하는 작업이 필요하다. 변수를 설정하여 보시오.

---

6) 비타민 D 1 ug = 1 mcg = 40 국제단위(IU)
ug=>마이크로그램(유럽에서는 ug대신에 mcg라고 쓰기도 함.)
1kg=1000g, 1g=1000mg, 1mg=1000ug
IU = international unit, 효소나 비타민의 활성이나 양을 나타내는 단위
다음 표는 한국인의 1일 비타민 D 권장량(출처: 한국인 영양 권장량 제 7개정).

월령, 연령	양	비고
0 - 4개월	5ug	조제분유 복용시에는 10ug
5 - 10개월	10ug	
1 - 9세	10ug	
10 - 19세	10ug	
20 - 49세	5ug	수유부나 임산부는 5ug씩 추가로 복용.
50세 이상	10ug	따라서 성인의 경우 보통 400IU정도 복용.

출처 : http://kin.naver.com/browse/db_detail.php?d1id=7&dir_id=707&docid=365584

2) 구하고자 하는 것은 무엇입니까?

3) 제약 조건에는 어떤 것이 있는지 설명하여 보고, 식으로 표현하여 봅시다.

■■ 배합문제

B사는 금년에 두 종류의 비료를 생산하여 팔려고 한다. 하나는 일반용 비료이며 또 하나는 특수비료이다. 비료는 두 가지 원료를 섞어서 만드는데 각 원료는 질소와 인산의 함유비율이 다르다. 각 원료의 가격 및 성분 함유비율은 다음 표와 같다.

원료	가격(원/kg)	질소(%)	안산(%)
1	1,000	60	10
2	1,500	10	40

이번 달에는 특수비료가 25kg짜리 부대로 5,000부대, 일반용이 7,000부대가 팔릴 것으로 보인다. 특수비료는 질소의 함유량이 40~50%이어야 하며 일반용 비료는 20% 이상의 인산을 함유하여야 한다. 최소의 비용으로 수요를 만족시키려면 어떻게 혼합하여 생산해야 할 것인가?

1) 먼저 이 문제를 해결하기 위해 수식화하는 작업이 필요하다. 변수를 설정하여 보시오.

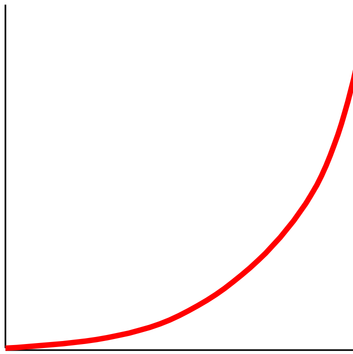
2) 구하고자 하는 것은 무엇입니까?

3) 제약 조건에는 어떤 것이 있는지 설명하여 보고, 식으로 표현하여 봅시다.

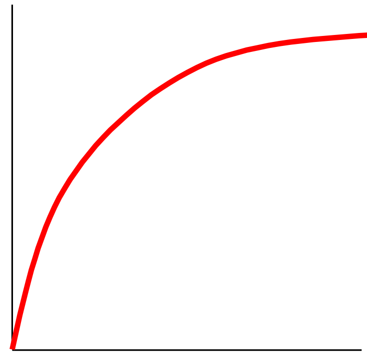


심화활동 ☞ 반드시 학습할 필요는 없습니다.

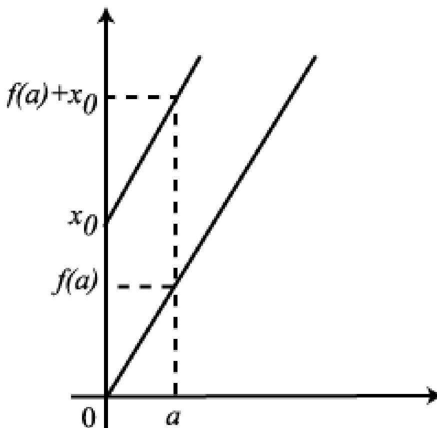
■■ 선형과 비선형

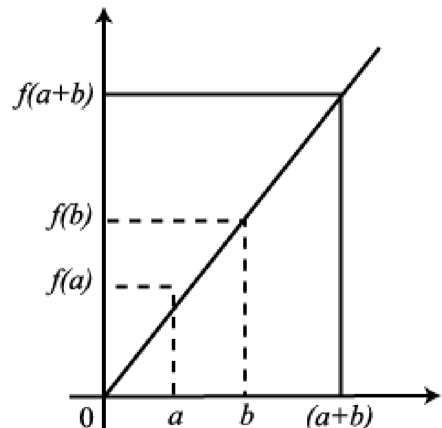


양의 비선형성



음의 비선형성





1) ‘선형’과 ‘비선형’의 차이점은 무엇인지 조사, 탐구하여 보시오.

1차식이나 1차함수들을 선형이라고 한다는 것은 이미 잘 알 것이다. ’선형’이란 (그래프가) 직선으로 나타난다는 뜻이다. 1차식의 그래프는 (직)선형이다.

카오스는 명백하고 간단한 운동을 하는 선형에서는 일어나지 않으며,

오직 비선형의 상태에서 문제가 된다. 이처럼 선형은 단순하다. 하나의 원인에는 하나의 결과가 있을 뿐이며, 결과를 보고 원인이 어떤 것이었는지 짐작할 수 있다. 그러나 비선형은 그렇지 않다.

선형과 비선형의 차이를 비유적으로 개미를 가지고 설명해 보자. 개미들이 선형적으로 협동할 때는 개미의 숫자와 비례해서 무거운 먹이를 운반할 수 있다. 그러나 만약 개미가 비선형적인 협력을 할줄 안다면, 이전보다 더 적은 수의 개미로도 더 무거운 먹이를 운반할 수 있다. 바로 이것이 선형과 비선형의 차이이다. 비선형은 이처럼 우리가 예상하지 못했던 훨씬 높은 차원의 현상을 일으킨다. 지금의 기술 수준으로는 비선형 현상을 마음대로 제어할 수 없기 때문에 비선형성은 그다지 환영받지 못한다. 그러나 앞으로의 과학기술은 비선형성의 활용에서 많은 성과를 얻어낼 수 있을 것이 틀림없다.

카오스는 비선형 방정식 가운데서 특히 피드백(feed back)의 성질을 갖는 대상에서 발생한다. 피드백은 하나의 방정식이 있을 때, 그 식에서 나온 결과가 계속 반복적으로 같은 식에 대입되는 성질을 갖는다. 겉보기에는 간단한 것 같지만, 피드백이 되풀이되면서 상황이 매우 복잡하게 변화한다. 식은 하나이지만 그것으로부터 나온 결과는 수시로 바뀌기 때문에 예측이 어렵다. 축구 경기에서 각 선수들의 순간마다의 위치를 알아 맞추는 일처럼 말이다. 한 발짝 움직일 때마다 공의 위치가 바뀌므로 선수들의 위치가 앞으로 어디에 있게 될지 도저히 짐작할 수도 없다.

뉴튼역학에서는 선형계가 주된 연구의 대상이었다. 선형계는 몇 개의 단순한 구성요소로 분석하여 그들의 특징을 파악하면 다시 종합함으로써 전체 행동을 추측할 수 있다. 이러한 특성 때문에 뉴튼역학의 대상은 주로 정량적인 방법이 사용된다. 비선형이라 해도 선형으로 근사시키는 선형화라는 방법으로 비선형의 항을 소거하여 근사적으로 단순한 형태로 바꾸어 그 행동을 예측할 수는 있다. 그러나 비선형계는 본질적으로 몇 개의 간단한 구성요소로는 분석이 불가능할 뿐만 아니라, 만약 분석이 된다고 해도 그것들이 종합될 때는 각 부분, 또는 요인들이 서로 상승작용하여 전체의 행동을 예측하기가 매우 어려워진다.

선형의 특성에 대해서 수학적으로 따져 보기로 하자.

1) $f(x)$가 선형함수일 때, 초기치 x_0를 정해 두면 $x=a$ (a는 임의값) 에 있어서의 답은 유일하게 결정된다.

이 법칙은 하나의 원인에서 유일하게 결과가 딱 부러지게 나온 것이므로 선형의 전형적이고 결정론적인 성격을 나타낸다. 그러나 (1)의 성질은 반드시 선형법칙만을 갖는 것은 아니다. 가령, $f(x)=x^2$ 은 (1)의 성질을 갖고 있지만, 그래프는 포물선이 되므로 선형함수가 아니다.

2) 선형함수에서는 $f(a)+f(b)=f(a+b)$가 성립한다.

일반적으로 $f(x)=nx$이면, $f(a+b)=n(a+b)=na+nb=f(a)+f(b)$ 이다. 이 특성 때문에 선형계에서는 미래를 정확히 예측할 수 있는 것이다.

한편, $y=x^2$이나 삼각함수는 선형이 아니다. 가령, $f(x)=x^2$일 때, $a=1$, $b=2$ 라고 놓으면 $f(a)=1$, $f(b)=4$이고,
$f(a)+f(b)=1+4=5$

한편, $f(a+b)=f(3)=9$이므로 $f(a+b)$와 $f(a)+f(b)$는 서로 다르다. 일반적으로 $f(a)+f(b)\neq f(a+b)$이다.

이상에서 본 것처럼 선형은 다음 두 가지의 성질을 특징적으로 갖는다.

(1) 초기치 x_0를 정해두면 임의값 a에 있어서의 답은 유일하게 결정된다.
(2) 선형함수에서는 다음 ①, ②가 성립한다.
① $f(a)+f(b)=f(a+b)$
② $f(na)=nf(a)$

이 선형함수로 나타내어지는 역학계가 바로 선형역학계이다. 선형역학계의 예로, 영국의 물리학자 후크(Robert Hooke, 1635~1703)가 발견한 '후크의 법칙'을 만족하는 용수철이 있다. 이 용수철은 힘을 가한 만큼 늘어난다($F=-kx$; F는 가한 힘, k는 용수철의 상수, x는 변형된 용수철의 길이). 즉, 용수철의 길이는 그에 가해진 힘에 비례하는 것이다. 그러나 실제의 용수철은 어느 한도 내에서만 후크의 법칙에 따르고, 그 이상에서

는 비선형성을 보인다.

선형함수의 두번째 특징은 요소환원주의의 입장과 일치한다는 점이다. 과학자들은 미지의 대상을 연구할 때, 우선 그것의 부분을 해체하고, 그것들의 요소가 무엇인지를 밝히고, 그 요소들이 우리가 익히 알고 있는 것들인가를 낱낱이 따진다. 그리하여 이들 요소의 종합으로 미지의 대상 전체를 '이해'했다고 생각한다. 이 요소환원주의적인 사고에는 다음과 같은 위험이 따른다. 즉, 비선형 방정식으로 나타내어지는 자연현상을 선형 방정식으로 근사적으로 나타낼 수 있고, 아주 복잡한 현상은 통계적으로 평균치를 구하면 된다고 안이한 생각을 하기 쉽다. 그러나 선형적인 현상은 자연계에서는 극히 특수한 경우이며, 오히려 비선형적인 현상이 보다 일반적인 것이다. 게다가 비선형을 선형에 근사시키는 일에는 한계가 있다.

이제까지의 과학은 좁은 선형의 세계가 주된 연구의 대상이었다. 그러나 우리의 주변에는 비선형적인 사건이 훨씬 더 많은 것이다. 어린이가 빨리 키가 크고 힘도 세지고 싶어서 밥을 많이 먹는다 하여도 먹는 양에 비례해서 키가 크거나 힘이 세지지 않는다. 물을 준 만큼 나무가 자라주지는 않는다. 엔진을 크게 한다고 자동차의 속도가 그에 비례해서 빨라지지는 않는다. 이처럼 우리 주변은 온통 비선형으로 가득찬 세계이다.

이러한 비선형성은 우리가 알지 못하는 무수한 요인들에 의해서 비롯된다. 앞에서 예를 든 용수철도 어느 한계 안에서는 후크의 법칙을 만족하는 선형성을 보이지만, 용수철이 오래되었거나 어느 한도 이상의 힘을 가하면, 용수철의 기계적인 작용 외에 용수철의 재질의 특성이 주요한 요인으로 작용하기 시작한다. 이렇게 한 가지 이상의 요인이 복합적으로 작용하므로 비선형성이 나타나는 것이다.

선형에서 비선형 현상으로 넘어가는 재미있는 예가 있다. 독일의 화학자 리비히(J. F. von Liebig, 1803~1873)에 의해 밝혀진 식물 생육에 필요한 영양분에 관한 '최소량의 법칙'이라는 것이 있다(이 법칙은 고교의 생물 교과서에도 나온다). 그 내용을 간추리면 다음과 같다.

식물이 자라는 데는 영양분이 골고루 갖추어져 있어도 한 가지 영양분

이 부족하면, 그 때문에 식물의 성장이 제한을 받는다. 따라서, 이 결핍된 영양분을 주면 이에 비례하여 식물은 자라게 된다. 즉, 선형적이다. 그러나 그 영양분만 계속 공급한다고 해서 식물이 잘 자라는 것은 아니다. 어느 한계, 즉 다른 영양분의 한계까지만 선형성이 나타나고, 그 이상은 다른 영양분의 양에도 영향을 받기 때문에 비선형성이 나타나는 것이다.

한마디로 비선형이라고 하지만, 이 현상을 더 자세히 살펴보면 거기에는 두 가지 양상이 나타난다. 즉, 비선형계의 각 요소의 변화의 합이 전체의 변화보다 작을 때가 있고, 클 때가 있는 것이다. 이것을 각각 '양의 비선형성', '음의 비선형성'이라고 부른다. 특히 양의 비선형성은 생명현상과도 깊은 관련이 있다.

출처 http://blog.naver.com/post/postView.jsp?blogId=hongcom&logNo=120000454806
http://www.aistudy.co.kr/ 인공지능 응용분야인 전문가시스템, 퍼지, 신경망 패턴인식 등에 관한 연구자료 제공



읽기자료

■■ 가장 경제적인 식단

1945년 미국 컬럼비아 대학 교수였던 스티글러 (Stigler, G., 1911~)는 가장 저렴하면서도 하루에 필요한 열량, 단백질, 칼슘, 철분, 비타민A, 티아민(비타민 B_1), 리보플라빈(비타민 B_2), 니아신 및 아스코르브산(비타민 C)을 모두 섭취할 수 있는 식단을 연구하였다.

그는 70가지의 식품을 조사한 결과, 가장 저렴하면서도 위에서 언급한 영양소를 모두 만족하는 식단은 밀가루, 양배추, 돼지의 간을 조합하면 된다는 것을 알았다. 이들을 사용하여 1945년 당시의 가격으로 식단을 짜면, 한 사람이 건강을 유지하면서 1년을 살아가는 데 $59.88가 필요하다는 것도 알았다. 그 후로 물가가 많이 올랐기 때문에 지금 가격으로는 약 $400가 필요할 것으로 추정된다.

이와 같이, 수학은 가장 경제적인 식단짜기에도 활용된다.



3단계 : 수행하기

부등식 만들기

활동 4. 놀이 속에서 부등식 만들기

활동 4

놀이 속에서 부등식 만들기

놀이나 게임을 통한 수학적 원리의 발견은 오래 전부터 연구되어왔고, 그 분야도 다양하여 주사위를 통한 게임, 초콜릿을 이용한 게임 등 많은 분야에 걸쳐 연구가 계속되어 왔다.

이 단계에서는 1, 2단계에서 배운 전략을 가지고 학생들 스스로 문제를 만들어 보고, 재미있는 수학 놀이 '꼭지네모놀이'속에서 나타나는 부등식의 관계를 파악하고 탐구하는 활동을 한다.

학습 목표	･꼭지네모놀이를 두 명이 함께 할 수 있다. ･꼭지네모놀이를 혼자 할 수 있다. ･꼭지네모놀이 속에서 규칙성을 발견할 수 있다. ･꼭지네모놀이 속에서 부등식의 관계를 만들고 증명할 수 있다.	
준비물	**교사용**	･바둑판, 바둑돌(흑, 백)
	학생용	･바둑판, 바둑돌(흑, 백), 필기도구, 활동지



교수-학습활동

학습 단계	교수-학습 활동	예상 시간	유의점
도입	· 전체 주제에 대한 소개 및 동기를 유발시킨다. · 활동안내와 학습목표를 이해시킨다. · 학습 준비물을 확인한다.	5 ~ 10분	· 프로젝트 전체 과정에 대해서 설명하고, 이를 이해하도록 한다.
본 활동	· 꼭지네모놀이 설명하기 · 두 명씩 짝을 이루어 꼭지네모놀이하기 －활동지 [$n=4$, 5, ,6 ,7일 때 꼭지네모놀이하기] · 혼자서 꼭지네모놀이하기 －활동지 [$n=4$, 5, ,6 ,7일 때 꼭지네모놀이하기]	25 ~ 35분	· 다양한 문제 해결전략의 활용 결과를 검토하여 장단점을 느낄 수 있도록 지도한다. · 모든 학생들이 참여하도록 독려한다. · 학생들의 활동이 문제의 본질에서 벗어나지 않도록 유의한다. · 충분히 문제 해결 전략의 상황과 취지가 이해되도록 한다. · 논리적 추론 근거의 중요성을 강조한다.
	· 혼자서 꼭지네모놀이를 하고 부등식이 성립하는 예를 찾아보기 －활동지 [부등식이 성립하는 예 찾기] －활동지 [꼭지네모놀이 속에서 발견되는 부등식 증명하기] · 논의된 방법을 발표하고, 어떠한 방법이 효과적일지 전체 토론한다. · 교사는 학생들의 의견을 수렴하여 정리하는 형식으로 설명하여 준다.	25 ~ 35분	
정리	· 최적의 선택을 위해 부등식이 어떤 역할을 하는지 토의해 본다.	5 ~ 10분	· 학생들이 다양한 의견을 제시하고 적극적인 참여할 수 있도록 유도한다.



주요 초점질문

1. 꼭지네모놀이에서 체스판(바둑판)의 크기에 따라 얻어지는 규칙은 무엇입니까?
2. 꼭지네모놀이에서 발견되는 부등식을 구하여 봅시다.



지도 활동

■■ 꼭지네모놀이 속에서 만드는 부등식

꼭지네모놀이를 해 보자.

꼭지네모놀이란 다음과 같은 놀이이다.

$n \times n$ 칸을 갖는 체스판(바둑판)에 돌을 놓는 놀이로 한 칸에는 두 개 이상의 돌을 놓을 수 없고, 이 체스판(바둑판)에 놓은 어느 네 개의 돌이 꼭지네모(체스판의 격자선과 평행한 변을 갖는 직사각형)의 네 꼭지점이 되는 경우가 없도록 한다.

놀이를 진행하다가 누군가의 차례에서 돌을 놓는 순간 꼭지네모가 처음 만들어지면, 그 돌을 놓은 사람이 경기에 지고, 그래서 놀이는 끝난다.

여기서는 둘이서 하는 놀이 말고 혼자서 하는 꼭지네모 놀이에 대해 생각해 보자. **혼자서 하는 꼭지네모 놀이의 목표는, 주어진 n에 대해 그 말판에 꼭지네모가 생기지 않는 한에서 최대 개수의 돌을 놓는 것**이다. **이 최대 개수를 $\square_n$으로 나타내기**로 하자.

1. 두 사람씩 짝을 이루어 꼭지네모놀이를 해 보자. 다른 순서로도 여러 번 해 보자.

지도초점 학생들에게 바둑판과 바둑돌을 이용하여 꼭지네모놀이를 하게 한 다. 가로 세로의 개수가 같게 범위를 정하여 시행하고 시행할 때마다 다른 결과가 나오는 것을 옮겨 적어 그대로 보존케 하고 각각의 결과를 비교해 보게 한다.

2. 이번에는 혼자서 꼭지네모놀이를 해 보자. 다른 순서로도 여러 번 해 보자.

지도초점 학생들에게 바둑판과 바둑돌을 이용하여 꽈지네모놀이를 하게 한 다. 가로 세로의 개수가 같게 범위를 정하여 시행하고 시행할 때마다 다른 결과가 나오는 것을 옮겨 적어 그대로 보존케 하고 각각의 결과를 비교해 보게 한다.

3. 다음의 값을 구하여 보시오.

1) $\square_4$ =

2) $\square_5$ =

지도초점 학생들에게 활동지를 나누어주고 바둑판과 바둑돌을 이용하여 꽈지네모놀이를 하게 한 후 활동지에 기록, 발표를 시키고 학생들의 의견을 수렴하여 정리하여 준다. 틀린 학생들은 어디에서 잘 못되었는지 스스로 찾을 수 있도록 유도한다.

풀이) 실제 꽈지네모 놀이를 해 보면,

$\square_4$ = 9, $\square_5$ = 12 임을 확인할 수 있을 것이다.

4. 꽈지네모놀이 속에서 다음 부등식이 성립하는 예를 들어 보시오. (단, $n \geq 2$)

1) $\square_n \geq 2n-1$

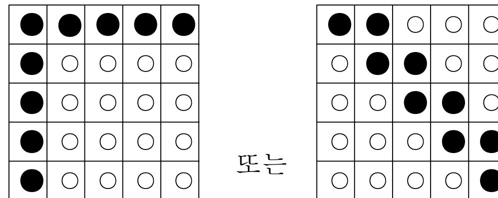
2) $\square_n \geq 3(n-1)$

지도 초점

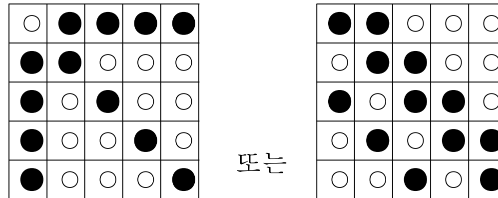
(1)보다 (2)가 더 강력한 부등식이므로, 세 부등식 중에서 학생들이 증명할 수 있는 가장 아래쪽의 부등식 하나만 보이면 된다. 위에서 제시된 부등식 외에 학생들이 제안할 수 있는 최선의 부등식이 있다면 그것을 증명하게 한다. 물론, $\square_n$의 정확한 값을 구할 수 있다면 그보다 더 좋을 수는 없다.

풀이) 다음의 그림으로 간단히 보일 수 있다.

예를 들어 $n=5$일 경우,



에 의해 1)가 확인되고,



에 의해 2)이 확인된다.

5. 꼭지네모놀이 속에서 다음 부등식을 증명하시오. (단, $n \geq 2$)

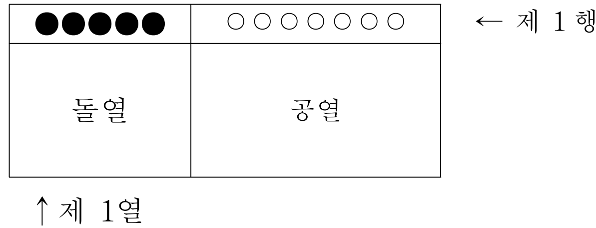
$$\square_n \leq \frac{n^2+6n-3}{4}$$

지도초점

학생의 의견을 수렴하여 정리하는 형식으로 설명해 준다.

여기에서도 학생이 제안할 수 있는 다른 최선의 부등식을 있다면 그것을 증명하여도 된다. 물론, $\square_n$의 정확한 값을 구할 수 있다면 그보다 더 좋을 수는 없음을 강조한다.

풀이) 모든 열과 모든 행을 조사하여 가장 많이 놓인 줄을 택하고, 그 줄의 돌의 개수를 k라 하자. 편의상 이 줄이 열이 아니라 행이라고 하고, 또한 제 1행이라 하자. 역시 편의상 이 제1행에 놓인 돌들이 모두 행의 왼쪽부터 빈칸 없이 몰려 있다고 생각해도 된다. 이 왼쪽에 몰린 돌들을 포함하는 열들을 돌열이라 하고, 이 돌들을 포함하지 않는 오른쪽 열들을 공열이라 부르자.



꼭지네모가 없으려면, 돌열 안의 각 행에는 돌이 많아야 1개 밖에 놓일 수 없다. 따라서, 돌열에 포함되는 돌의 개수는 제 1행을 포함하여 많아야 $k+(n-1)$이다. 그리고 k의 최대성으로부터, 공열의 각 열은 많아야 k개의 돌을 가진다. 즉, 공열에 포함되는 돌의 개수는 많아야 $k(n-k)$이다. 이로부터, 우리는 부등식

$$\square_n \le -k^2+(n+1)k+(n-1) \le \frac{n^2+6n-3}{4}$$

을 얻을 수 있다.



참고자료

1. 참고 서적 및 문헌

① 한국과학기술원수학문제연구회, MATH LETTER 모음집

2. 관련 인터넷 사이트

① http://www.msquare.or.kr KAIST 수학문제연구회

② http://gifted.msquare.or.kr/2001/lec/2001C3.html KAIST 사이버원격교육

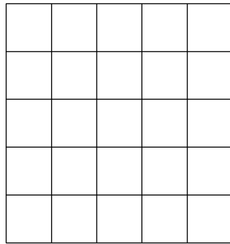
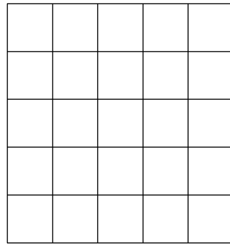
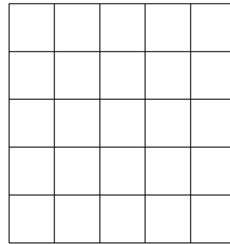


학습 활동

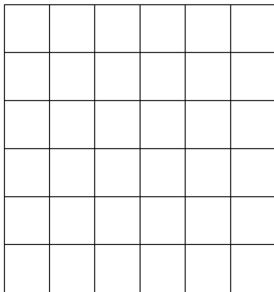
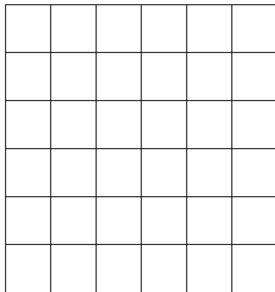
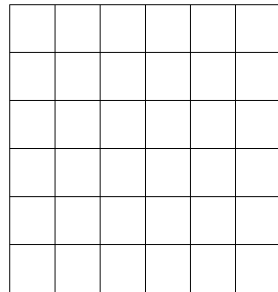
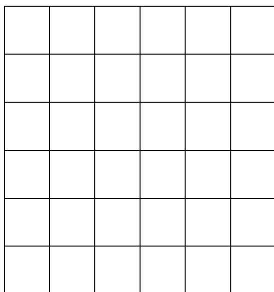
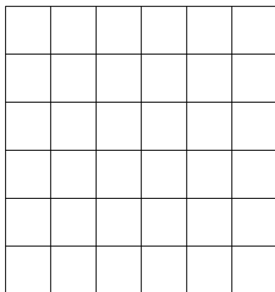
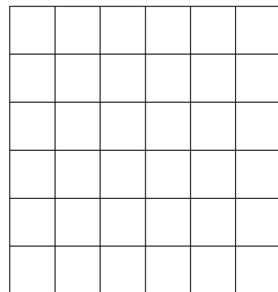
1. 두 사람씩 짝을 이루어 꼭지네모놀이를 해 봅시다. 바둑판의 범위를 아래 표의 모양으로 한정하여 해 봅시다.
   놀이 순서를 바꾸어 여러번 해 봅시다

1) $n=4$인 경우

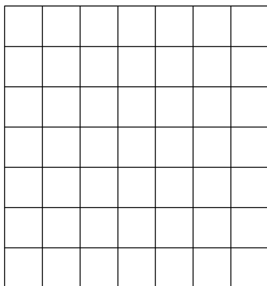
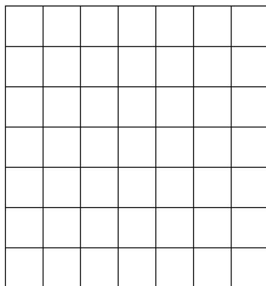
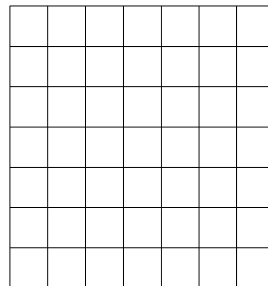
2) $n=5$인 경우

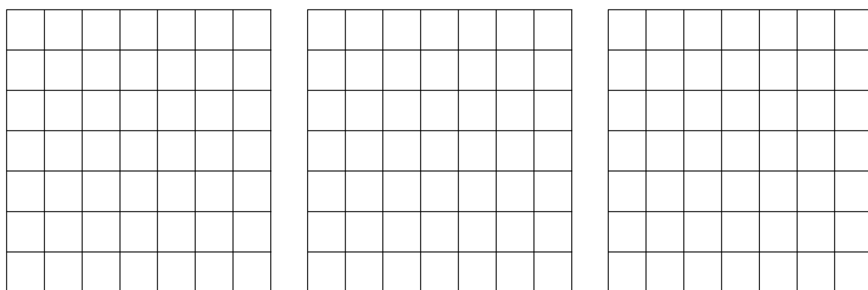




3) $n=6$인 경우

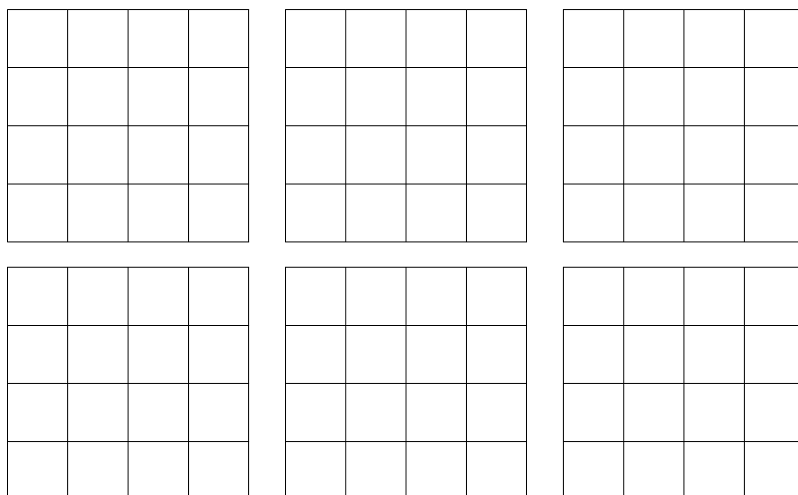
4) $n=7$인 경우

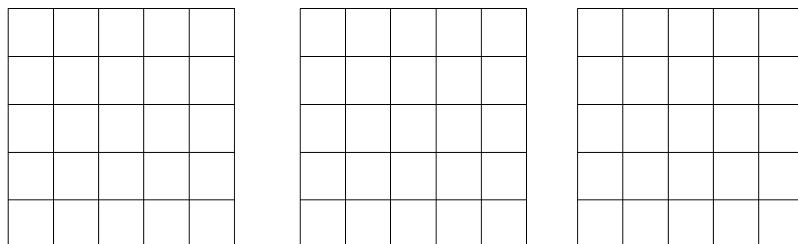


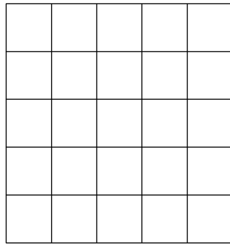
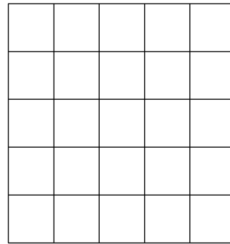
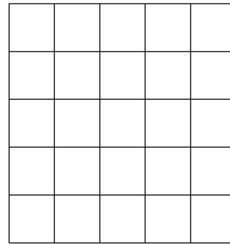
2. 이번에는 혼자서 꼭지네모놀이를 해 보고 다음 값을 구하여 봅시다
다른 순서로도 여러번 해 봅시다

1) $\square_4$ =



2) $\square_5$ =



3. 각자 꼭지네모놀이를 해 보고 구한 값을 비교하여 봅시다. 누가 맞았는지 왜 틀렸는지 확인하여 봅시다.

 학습 활동

1. 꼭지네모놀이 속에서 다음 부등식이 성립하는 예를 들어 보시오. (단, $n \geq 2$)

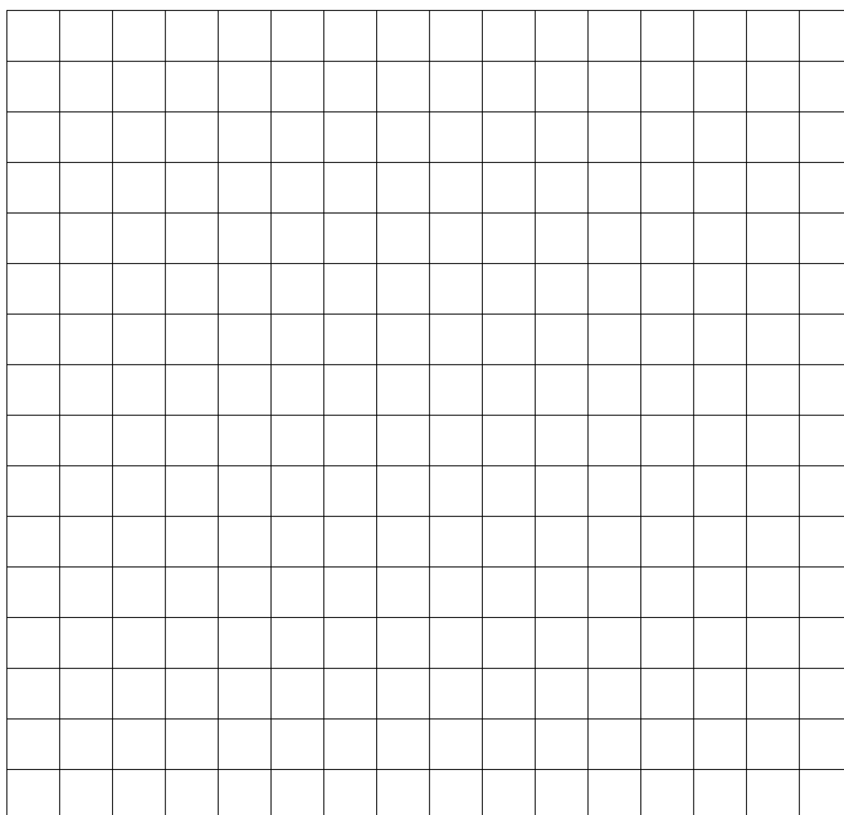
1) $\square_n \geq 2n-1$

2) $\square_n \geq 3(n-1)$

2. 꼭지네모놀이 속에서 다음 부등식을 증명하여 보시오. (단, $n \geq 2$)

$$\square_n \leq \frac{n^2+6n-3}{4}$$

<바둑판이 없거나 손으로 그려서 하고 싶은 학생을 위한 16×16 칸을 갖는 체스판(바둑판)>





평가도구 및 참고

1. 문항카드 형식
2. 수학일기 형식
3. 학생 설문지
4. 교사 설문지
5. 산출물 평가지

<부록> 문항카드

< 카드번호 :   >

내가 만든 문제

문 항 카 드

문제의 이름	학교	학년	반	번호	이 름

(문제)

(정답)

(풀이1)

(풀이2) - 다른 방법

(문제를 변형한 경우는 원래의 문제)

(문제를 만드는데 참고한 책)

저자이름	책이름	페이지	출판사	출판연도

<부록> 수학일기

학 교	학년	년 월 일	이 름

제 목 : *(생각나는 수업목표)*

배운내용 :

수업에 관한 나의 생각 :

오늘의 특기사항 *(수업시간에 생각한 다른 내용이나, 몸이 아파서 집중이 안되었다거나, 선생님에게 담배냄새가 나서 정신집중이 안되었다거나 기타등등)*

부 록

[학생용 설문지]

번호	설문내용	매우 그렇다	그렇다	보통이다	그렇지않다	전혀 그렇지 않다
1	나는 이 프로그램에 참여할 자격이 있다고 생각한다	①	②	③	④	⑤
2	나는 프로그램에 참여한 다른 학생들과 비슷한 수준이라고 생각한다.					
3	수업도중 질문할 기회가 충분히 있었다.					
4	각 주제에 관하여 깊이 있게 배웠다.					
5	학습에 필요한 시설, 도구, 학습자료가 충분히 있었다.					
6	여러 가지 활동으로 수업이 진행되었다.					
7	프로그램 실시 동안 선생님 또는 다른 학생들과 의견을 주고받을 기회가 있었다.					
8	나는 이 프로그램에 적극 참여했다.					
9	프로그램이 끝난 후 여러 가지 평가를 받았다.					
10	프로그램 참여 후 나는 문제를 여러 가지 방향으로 생각하게 되었다					
11	프로그램 참여 후 나는 문제를 남들과 다르게 풀려고 생각하게 되었다					
12	프로그램 참여 후 원인과 결과를 자세히 살펴보게 되었다.					
13	프로그램이 끝난 후 수학에 대해서 더 많이 알게 되었다.					
14	프로그램이 끝난 후 수학에 대해서 더욱 많이 관심을 가지게 되었다					

번호	설문내용	매우 그렇다	그렇다	보통이다	그렇지않다	전혀 그렇지 않다
15	프로그램이 끝난 후 나는 더욱 한 문제를 풀려고 끈기있게 노력하게 되었다	①	②	③	④	⑤
16	이 프로그램은 내가 나의 의견을 설득력 있게 표현하고 다른 사람의 의견을 비판적으로 들을 수 있게 되는데 도움을 주었다					
17	이 프로그램은 다른 사람들과 협동하는 능력을 키워주었다.					
18	기회가 주어지면 다시 이런 프로그램에 참여하고 싶다.					

주관식

19. 프로그램 실시 후 특히 좋았다고 생각되는 점

20. 프로그램의 개선되어야 할 점

21. 기타 의견

부 록

[교사용 설문지]

번호	설문내용	매우 그렇다	그렇다	보통이다	그렇지않다	전혀 그렇지 않다
1	이 프로그램은 학생들의 개인차 (능력수준, 관심사, 학습속도등)를 고려한다.	①	②	③	④	⑤
2	이 프로그램은 수학영재들의 창의적 문제 해결력 계발을 목표로 한다.					
3	이 프로그램은 수학 영재들의 탐구적 태도 계발을 목표로 하고 있다.					
4	프로그램의 목적과 수준에 맞는 학생들이 판별되었다.					
5	판별된 학생들은 동질집단이다.					
6	프로그램 실시 후 계속적 관찰에 의한 추후 판별이 실시되었다.					
7	이 프로그램에 제시된 학습목표 및 활동들은 수학영재아들의 특수한 욕구(지적, 창의적, 탐구)를 충족시켜 주는데 적절했다.					
8	프로그램의 내용 및 활동들이 프로그램의 학습목표에 맞게 체계적으로 조직되어 있다.					
9	이 프로그램은 수학영재들의 탐구적 태고 계발을 목표로 하고 있다.					
10	이 프로그램의 난이도는 학생들의 지적수준에 적절하다.					
11	교사는 프로그램을 운영할 수 있도록 사전에 훈련을 받았다.					
12	교사는 프로그램을 운영하는데 부담을 느끼지 않았다.					
13	교사는 이 프로그램에 적극적으로 참여했다.					

번호	설문내용	매우 그렇다	그렇다	보통이다	그렇지않다	전혀 그렇지 않다
14	교사는 프로그램이 실시되는 동안 학생들의 창의성이나 지적호기심에 민감하게 반응한다	①	②	③	④	⑤
15	프로그램에 참여한 학생 수는 프로그램의 효율적 운영에 적절했다.					
16	프로그램 실시를 위해 소요된 시간은 프로그램의 효율적인 운영에 적절했다.					
17	학습자료나 교재들이 다양하게 사용되었다.					
18	프로그램에 제시된 여러 가지 활동(연사초청, 실험, 영상자료 시청 등)을 이용했다.					
19	학생들은 이 프로그램에 적극적으로 참여했다					
20	주어진 주제에 대해 깊이 있는 학습이 이루어졌다.					
21	프로그램 실시동안 교사와 학생, 학생과 학생간의 교류가 있었다.					
22	프로그램을 운영하는데 필요한 행정적 재정적 지원이 있었다.					
23	프로그램 실시 후 과학 영재들에 대한 적절한 평가가 이루어졌다.					
24	창의적 문제해결					
25	논리적 사고력					
26	주제에 대한 지식					
27	지적 호기심					
28	과제 집착력					
29	의사소통능력					
30	구성원과의 협동능력					

주관식

31. 프로그램실시 후 특히 좋았다고 생각되는 점

32. 프로그램의 개선되어야 할 점

33. 기타

[부록] 산출물 평가지

번호	측정요소	측정의 근거	1점	2점	3점	4점	5점
1	독창성.	기존의 것에서 탈피하여 참신하고 독특한 아이디어를 제시하고 있다.					
2	논리성	전개과정과 문제해결에서 전후가 명확하며, 원인과 결과 및 사용되는 이론적 배경이 분명하다.					
3	복합성	몇 가지의 상이한 요소, 부분 또는 사용수준들을 포함하고 있다.					
4	발전 가능성	앞으로 새로운 산출물들을 만들어 낼 수 있는 새로운 이이디어들을 많이 시사해주고 있다.					
5	변형 가능성	사람들로 하여금 이 분야를 전혀 새로운 방식으로 보거나 생각하게 만들고 있다.					
6	표현력	사물이나 자연 및 사회 현상을 수학적으로 분명하게 표현하고 있다.					
7	가치성	수학적으로 가치 있고, 중요한 것이라고 생각할 수 있다.					
8	유기적 조직성	전체성, 즉 완전하다는 느낌을 가지게 해주고 있다					
9	기능적 솜씨	이 산출물에는 논리적으로 치밀하며, 도입 전개 결론에 이르는 전개과정이 높은 수준의 성취라고 할 수 있다.					
10	유용성	실제에 적용하여 사용할 수 있음이 분명하다.					

<수학에서의 학생에 의해서 가능한 산출물은, 새로운 문제를 만들어서 해결한 것이거나, 실생활에 나타난 어떤 상황을 수학적으로 표현한 것, 또는 자료의 수집을 통한 통계분석, 수학적인 아이디어를 이용한 게임 및 도구의 개발을 이야기할 수 있다.>